線形代数 期末試験 解答

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 15（4 点）　(2) 0（6 点）

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\det(A) = 2$　(2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$　(3) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -5 & -7 & -1 \\ -3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$（各 4 点）

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$（ただし c は任意の実数）（4 点）

(2) 行に関する基本変形により，拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & k \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & k-2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{array}\right)$$

と変形できる．連立方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ が解を持つための必要十分条件は $\mathrm{rank}\left(A \,|\, \vec{b}\right) = \mathrm{rank}(A)$ であるから，解を持つためには $k+1=0$，すなわち $\underline{k=-1}$ でなければならない．（4 点）

$k=-1$ のとき，拡大係数行列はさらに

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

と変形できる．これは元の連立 1 次方程式が消去法により

$$\begin{cases} x \quad\quad + \frac{5}{3}z = 1 \\ \quad\quad y - \frac{1}{3}z = -1 \end{cases}$$

と簡略化できることを意味する．$z=c$ とおくことにより解は $\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}}$

と書ける（c は任意の実数）．（4 点）

$\boxed{\mathbf{4}}$ （記号の選択および穴埋めが正しければ各 2 点，逆行列が各 2 点）

(1) （ウ）第 $\boxed{1}$ 行を $\boxed{3}$ 倍して，第 $\boxed{3}$ 行に加える．　$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) （イ）第 $\boxed{2}$ 行と第 $\boxed{3}$ 行を入れ替える．　$M^{-1} = M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) （ア）第 $\boxed{2}$ 行を $\boxed{2}$ 倍する．　$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2012.7.20 担当：佐藤