線形代数 中間試験 解答　　　　**2012.6.1**（担当：佐藤）

1

(1) 2 次正方行列が正則であるための必要十分条件は行列式が 0 でないことである．行列式が 0 でないのは，<u>(ア)（ウ）（エ)</u>.

(2) $\vec{a}$ との内積が 0 となるベクトルを選べばよいので，<u>(エ)</u>.

(3) 交代行列とは ${}^tA = -A$ を満たす行列のこと．対角成分がすべて 0 であることに注意．<u>(ウ)</u>.

(4) 直線 l のパラメーター表示は $(1-t, 3+2t, -2-t)$ であるから，$\vec{p} = (1-t, 3+2t, -2-t)$（または $\vec{p} - (1, 3-2) = t(-1, 2, -1)$）を満たす t が存在すれば，$\vec{p}$ は l 上の点である．答えは <u>(イ)（ウ)</u>（それぞれ，$t = -2$, $t = 1$ のとき）.

(5) （ア）は φ の逆置換，（イ）は恒等置換，（エ）は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \neq \varphi$. 答えは <u>(ウ)</u>.

2 (1) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -12 \\ -1 & 4 & -13 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 2 & -5 & 0 \\ 3 & -12 & -3 \end{pmatrix}$

(4) ${}^tB\,{}^tA = {}^t(AB)$ より，$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & -12 & -13 \end{pmatrix}$

(5) A の列の分割と B の行の分割が異なるものを選べばよいので，<u>(ア)（イ)</u>.

3 パラメーター表示は一意的でないことに注意.

(1) $(4+2s-t, -2+3t, 1+s+t)$ または $x+y-2z=0$

(2) $(1+2s+t, 2-3s-t, 3-s+t)$ または $-4x-3y+z=-7$

(3) 平面 $2x-y+6z=1$ の法線ベクトルは $(2,-1,6)$ である（また，平面 $2x-y+6z=1$ と同じ法線ベクトルの平面は $2x-y+6z=d$ の形で書ける，と理解してもよい）．点 Q_0 を通ることから，<u>$2x-y+6z=6$</u>.

(4) 直線 l 上の点は $(1+3t, -2+t, 1-2t) = (1,-2,1)+t(3,1,-2)$ と書けるので，l の方向ベクトルは $(3,1,-2)$ である．求める平面は l と直交することから，法線ベクトルは l の方向ベクトル $(3,1,-2)$ に等しい（平行である）．点 R_0 を通ることから，方程式は <u>$3x+y-2z=3$</u>.

$\boxed{\mathbf{4}}$

(1) 連立１次方程式を $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ と表し，係数行列の逆行列を左からかけることで解が得られる．

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-(-6)}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

したがって，解は $\underline{x = \frac{5}{4},\ y = -\frac{1}{2}}$ （消去法で解いても可）．

(2) 拡大係数行列 $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \end{array}\right)$ を $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$ と行基本変形することにより，解を導く．解は $\underline{x = 1,\ y = -2,\ z = -1}$