順で求めよう．

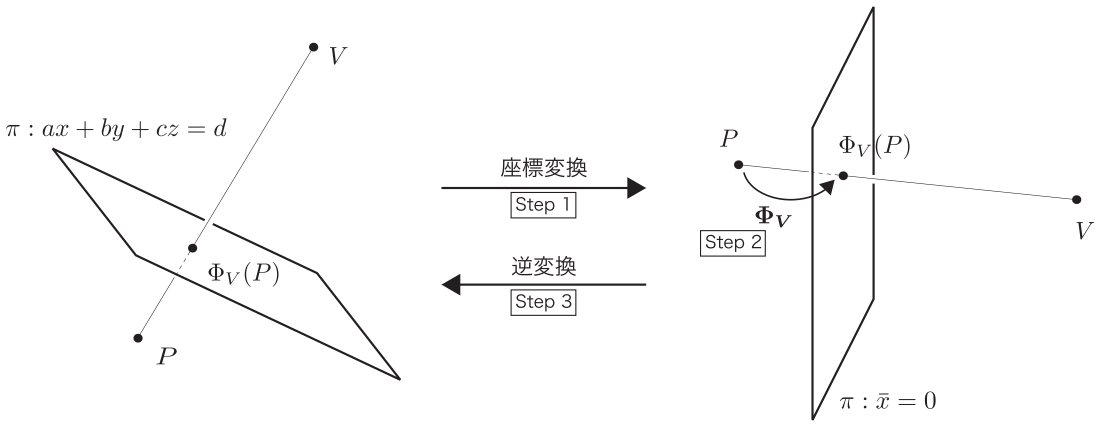

図 9　一般の平面への透視投影を行列の積で表す手順

3.2.1　Step 1：どう座標変換したらよいか？

座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \vec{u} \tag{3.1}$$

によって，方程式 $ax + by + cz = d$ が $\bar{x} = 0$（つまり $\bar{y}\bar{z}$-平面）となるように直交行列 M とベクトル $\vec{u}$ を選ぶ．ここで，M の第 i 列の列ベクトルを $\vec{m}_i$（つまり，$M = \begin{pmatrix} \vec{m}_1 & \vec{m}_2 & \vec{m}_3 \end{pmatrix}$）とし，$\vec{x} = (x, y, z)$, $\vec{\bar{x}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ とする．このとき，$ax+by+cz = d$ は

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = d \tag{3.2}$$

と書ける．(3.1) を (3.2) に代入すると

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{x} = d &\iff \vec{n} \cdot (M\vec{\bar{x}} + \vec{u}) = d \\ &\iff \vec{n} \cdot (M\vec{\bar{x}}) + \vec{n} \cdot \vec{u} = d \\ &\iff \begin{pmatrix} \vec{n} \cdot \vec{m}_1 & \vec{n} \cdot \vec{m}_2 & \vec{n} \cdot \vec{m}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \vec{n} \cdot \vec{u} = d \end{aligned} \tag{3.3}$$

となる．したがって，最後の式が $\bar{x} = 0$ となるために，

$$\vec{n} \cdot \vec{m}_1 = k\,(\neq 0), \quad \vec{n} \cdot \vec{m}_2 = \vec{n} \cdot \vec{m}_3 = 0 \tag{3.4}$$

を満たすように $\vec{m}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を選び，

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = d \tag{3.5}$$

となるように $\vec{u}$ を選べばよい．たとえば，M については，

- $\vec{m}_1 = \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$,
- $\vec{n}$ に直交する単位ベクトルを適当に選び，$\vec{m}_2$ とする，
- $\vec{m}_3 = \vec{m}_1 \times \vec{m}_2$

とすればよい．

問題 3.4. 上で述べたように直交行列（を構成する 3 つの列ベクトル）を定めたものが，なぜ (3.4) を満たすのか，「直交行列の定義（性質)」と「空間ベクトルの外積の性質」を用いて説明しなさい．

例題 3.5. (3.1) のように座標変換したら，平面 $x + y - z = 2$ の方程式が $\bar{x} = 0$ になったとする．このような変換を与える直交行列 M とベクトル $\vec{u}$ をそれぞれ 1 つ求めなさい．

解. 平面 $x + y - z = 2$ の法線ベクトルは $\vec{n} = (1, 1, -1)$ であるから，$\vec{m}_1 = \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ とする．$\vec{n}$ に直交するベクトルとして，$(1, -1, 0)$ を選び，これを適当に定数倍して単位ベクトルにしたものを $\vec{m}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ とする．$\vec{m}_3$ は $\vec{m}_1, \vec{m}_2$ の両方に直交する単位ベクトルであるから $\vec{m}_3 = \vec{m}_1 \times \vec{m}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$．したがって，

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

(3.5) を満たす $\vec{u}$ は，たとえば $\vec{u} = (1, 1, 0)$ など．

問題 3.6. (3.1) のように座標変換したら，平面 $3x - 4y + 5z = 6$ の方程式が $\bar{x} = 0$ になったとする．このような変換を与える直交行列 M とベクトル $\vec{u}$ をそれぞれ 1 つ求めなさい．

3.2.2 Step 2：$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$-座標系へ変換

Step 1 で求めた直交行列 M とベクトル $\vec{u}$ を用いて，(3.1) 式のように $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$-座標系に変換し，この座標系で透視投影する．

視点 V，投影する点 P の xyz-座標系に付随する同次座標をそれぞれ $(\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_0)$，$(\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_0)$ とする．また，点 P, V の $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$-座標系に付随する同次座標をそれぞれ $(\bar{\sigma}_1 : \bar{\sigma}_2 : \bar{\sigma}_3 : \bar{\sigma}_0)$，$(\bar{\mu}_1 : \bar{\mu}_2 : \bar{\mu}_3 : \bar{\mu}_0)$ とする．つまり，σ_i と $\bar{\sigma}_j$ は

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_0 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & M & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_3 \\ \bar{\sigma}_0 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

を満たすので，

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_3 \\ \bar{\sigma}_0 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & {}^t M & & -{}^t M \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_0 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

となる（μ_i と $\bar{\mu}_j$ も同様の関係式を満たす）．$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$-座標系で平面 π へ透視投影した点は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\sigma}_2 & \bar{\sigma}_1 & 0 & 0 \\ -\bar{\sigma}_3 & 0 & \bar{\sigma}_1 & 0 \\ -\bar{\sigma}_0 & 0 & 0 & \bar{\sigma}_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1 \\ \bar{\mu}_2 \\ \bar{\mu}_3 \\ \bar{\mu}_0 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

と書ける．

3.2.3 Step 3：xyz-座標系へ逆変換

Step 2 で求めた投影像を (3.8) の逆変換で xyz-座標系に戻す；

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & M & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\sigma}_2 & \bar{\sigma}_1 & 0 & 0 \\ -\bar{\sigma}_3 & 0 & \bar{\sigma}_1 & 0 \\ -\bar{\sigma}_0 & 0 & 0 & \bar{\sigma}_1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} & {}^t M & & -{}^t M \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_0 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

以上が，一般の平面への透視投影を行列の積の形で表すための手順である．

例題 **3.7.** 視点を $V(8, 9, -6)$，投影面を $\pi : x + y - z = 2$ とする透視投影を Φ_V とする．Φ_V は同次座標において行列の積で表すことができる．その行列を求めなさい．また，この結果を利用して点 $P(3, 2, -1)$ の投影像 $\Phi_V(P)$ を求めなさい．

解**.** Step 1 の座標変換は例題 3.5 の結果を使う．

$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$-座標系における視点 V の同次座標を求めよう．

$$
{}^tM = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad -{}^tM\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}
$$

であるから，(3.8) より

$$
V = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{6}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \\ -3 \\ \sqrt{6} \end{bmatrix}. \tag{3.11}
$$

したがって，$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$-座標系における Φ_V は行列

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 21\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 21\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{6} & 0 & 0 & 21\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{3.12}
$$

の積である．(3.10) より，xyz-座標系における Φ_V を表す行列は

$$
\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 21\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 21\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{6} & 0 & 0 & 21\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$
$$
= \begin{pmatrix} 13\sqrt{2} & -8\sqrt{2} & 8\sqrt{2} & 16\sqrt{2} \\ -9\sqrt{2} & 12\sqrt{2} & 9\sqrt{2} & 18\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & 15\sqrt{2} & -12\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 23\sqrt{2} \end{pmatrix}
$$

となる（これをスカラー倍した行列も同じ投影を表す）．点 $P(3:2:-1:1)$ の投影像は

$$
\begin{pmatrix} 13\sqrt{2} & -8\sqrt{2} & 8\sqrt{2} & 16\sqrt{2} \\ -9\sqrt{2} & 12\sqrt{2} & 9\sqrt{2} & 18\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & 15\sqrt{2} & -12\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 23\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \\ 17\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{17} \\ \frac{6}{17} \\ \frac{3}{17} \end{pmatrix}.
$$

問題 3.8. 視点を $V(8,-9,6)$，投影面を $\pi : 3x - 4y + 5z = 6$ とする透視投影を Φ_V とする．Φ_V は同次座標において行列の積で表すことができる．その行列を求めなさい．また，この結果を利用して点 $P(3,2,-1)$ の投影像 $\Phi_V(P)$ を求めなさい．