3 透視投影の同次座標系による表現

3.1 yz-平面への透視投影

視点が $V(v_1, v_2, v_3)$，投影面が yz-平面の透視投影 Φ_V を考える．yz-平面を方程式で表すと $x = 0$ であるから，Φ_V は (1.10) において，$\vec{n} = (1, 0, 0)$，$d = 0$ を代入した式で与えられる．$P(p_1, p_2, p_3)$ に対し，

$$
\begin{aligned}
\Phi_V(P) =& \vec{p} - \frac{\vec{p}\cdot\vec{n}}{(\vec{v}-\vec{p})\cdot\vec{n}}(\vec{v}-\vec{p}) \\
=& (p_1, p_2, p_3) - \frac{p_1}{v_1 - p_1}(v_1 - p_1, v_2 - p_2, v_3 - p_3) \\
=& (p_1, p_2, p_3) - \left(p_1\,, \frac{p_1(v_2 - p_2)}{v_1 - p_1}, \frac{p_1(v_3 - p_3)}{v_1 - p_1} \right) \\
=& \left(0\,, \frac{p_2(v_1 - p_1) - p_1(v_2 - p_2)}{v_1 - p_1}, \frac{p_3(v_1 - p_1) - p_1(v_3 - p_3)}{v_1 - p_1} \right) \\
=& \left(0\,, \frac{p_2 v_1 - p_1 v_2}{v_1 - p_1}, \frac{p_3 v_1 - p_1 v_3}{v_1 - p_1} \right)
\end{aligned}
$$

となる．これを同次座標で表すと

$$
\begin{aligned}
\Phi_V(P) = & \left(0 \,:\, \frac{p_2 v_1 - p_1 v_2}{v_1 - p_1} \,:\, \frac{p_3 v_1 - p_1 v_3}{v_1 - p_1} \,:\, 1 \right) \\
=& (0 : p_2 v_1 - p_1 v_2 : p_3 v_1 - p_1 v_3 : v_1 - p_1).
\end{aligned}
$$

ここで，V, P の同次座標をそれぞれ $(\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_0), (\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_0)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\Phi_V(P) &= \left(0 : \frac{\mu_2\sigma_1}{\mu_0\sigma_0} - \frac{\mu_1\sigma_2}{\mu_0\sigma_0} : \frac{\mu_3\sigma_1}{\mu_0\sigma_0} - \frac{\mu_1\sigma_3}{\mu_0\sigma_0} : \frac{\sigma_1}{\sigma_0} - \frac{\mu_1}{\mu_0} \right) \\
&= (0 : \mu_2\,\sigma_1 - \mu_1\sigma_2 : \mu_3\,\sigma_1 - \mu_1\,\sigma_3 : \mu_0\sigma_1 - \mu_1\sigma_0) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_2\sigma_1 - \mu_1\sigma_2 \\ \mu_3\sigma_1 - \mu_1\sigma_2 \\ \mu_0\sigma_1 - \mu_1\sigma_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_2 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ -\sigma_3 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ -\sigma_0 & 0 & 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

つまり，この場合は透視投影も行列の積で表される．

yz-平面への透視投影

視点が $V(\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_0)$，投影面が yz-平面である透視投影を Φ_V とする．このとき，点 $P(\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_0)$ に対し

$$\Phi_V(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_2 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ -\sigma_3 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ -\sigma_0 & 0 & 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_0 \end{bmatrix}$$

と表すことができる．

問題 **3.1.** 視点 $V(\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_0)$，投影面が次の各平面である透視投影も，同時座標系で表すと 4 次正方行列の積で表すことができる．その 4 次正方行列を求めなさい．

(1) xy-平面

(2) xz-平面

例題 **3.2.** $V(1, 2, 3)$ を視点とし，投影面を平面 $x = 0$ とする透視投影を Φ_V とする．点 $P(-1, \frac{1}{2}, 1)$ に対し，以下の問に答えなさい．

(1) 点 V, P を同次座標で表しなさい．

(2) 同次座標系において透視投影 Φ_V を表す 4 次正方行列を書きなさい．

(3) 透視投影 Φ_V による点 P の像 $\Phi_V(P)$ を求め，同次座標で表しなさい．

(4) (3) で求めた $\Phi_V(P)$ の同次座標を直交座標に直しなさい．

解． (1) 例えば $V(1 : 2 : 3 : 1)$，$P(-2 : 1 : 2 : 2)$ など[*1]．

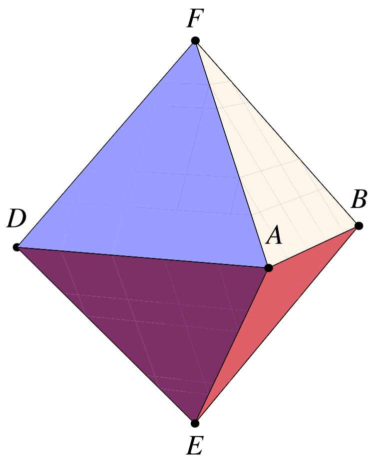
(2) (1) で定めた V の同次座標に対して，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

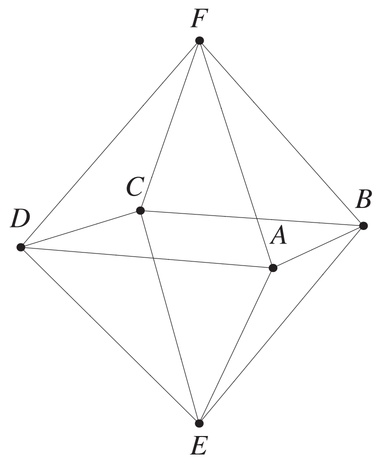
[*1] 同次座標系による表し方は一意的ではない．A についても S と同様に第 4 の座標を 1 としてよいが，ここではすべての座標の値が整数となるようにした（整数の方が計算が簡単になるのため）．

(4) 同次座標から直交座標に直すには，同時座標の第 4 成分を取り除き，他の成分は第 4 成分で割った値にすればよい．したがって，$(0, \frac{5}{4}, 2)$ [*2]．

問題 3.3. 視点が $V(10, 3, \frac{1}{2})$，投影面が平面 $x = 0$ の透視投影を Φ_V とする．6 個の点 $A(1, 1, 3)$，$B(-1, 1, 3)$，$C(-1, -1, 3)$，$D(1, -1, 3)$，$E(0, 0, \frac{3}{2})$，$F(0, 0, \frac{9}{2})$ を頂点とする 8 面体を Φ_V で移した像のワイヤーフレームを yz-平面に書きなさい．



サーフェイス モデル



ワイヤーフレーム モデル

コンピューターグラフィックスの立体表現手法

- ワイヤーフレームモデル
  立体図形を，その輪郭を表す線のみで表現する手法．
- サーフェイスモデル
  形状をその表面だけで表現したもの（ワイヤーフレームで作成された形状の表面に，面のデータを加えたもの）．
- ソリッドモデル
  立体図形を体積を持った（中身の詰まった）3 次元構造として表現．

3.2 一般の平面への透視投影

視点が $V(v_1, v_2, v_3)$，投影面が一般の平面 $\pi : ax + by + cz = d$ の透視投影についても，適当に座標変換することによって行列の積で表すことができる．

[*2] (1) から (3) までの解は同次座標の決め方に依るが，投影像の直交座標表示は一意的に決まる．