2 同次座標系

2.1 直交座標系と同次座標系

これまでは，点の位置を表す方法として直交座標系を用いてきた．平面上の点は 2 つの数の組 (x, y) で表され，空間上の点は 3 つの数の組み (x, y, z) で表された．ここでは同次座標系とよばれる新たな座標系を導入する．これは直交座標系に密接に関係していて，平面上の点を 3 つの数の組みで，空間上の点を 4 つの数の組みで表す座標系である．まずは簡単のため，平面の同次座標系について述べる．

定義 2.1. 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点 $A(a_1, a_2)$ に対し，

$$a_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad a_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \tag{2.1}$$

を満たす数の組み $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_0)$ を点 A の同次座標という．

注意 2.2. $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_0)$ を点 $A(a_1, a_2)$ の同次座標とする．このとき，任意の実数 $t\,(\neq 0)$ に対し，$(t\alpha_1 : t\alpha_2 : t\alpha_0)$ も点 A の同次座標となる．このように，同次座標で点を表すとき，その表し方は一意に定まらない．

$A(a_1, a_2)$ を表す同次座標の全体を考える．$(a_1 : a_2 : 1)$ が点 A の同次座標であることと注意 2.2 から，点 A の同次座標全体は

$$\{(x, y, z) \,|\, (x, y, z) = t(a_1, a_2, 1),\ t \in \mathbb{R},\ t \neq 0\}$$

である．これは 3 次元数空間 $\mathbb{R}^3$ 内の原点と $(a_1, a_2, 1)$ を通る直線である．つまり，同次座標系とは平面上の点と，空間内の原点を通る直線を同一視する座標系とみなすことができる（図 7)．

空間の同次座標系も平面と同様に定義される．

定義 2.3. 空間 $\mathbb{R}^3$ 上の点 $A(a_1, a_2, a_3)$ に対し，

$$a_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad a_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \quad a_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_0} \tag{2.2}$$

を満たす数の組み $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_0)$ を点 A の同次座標という．

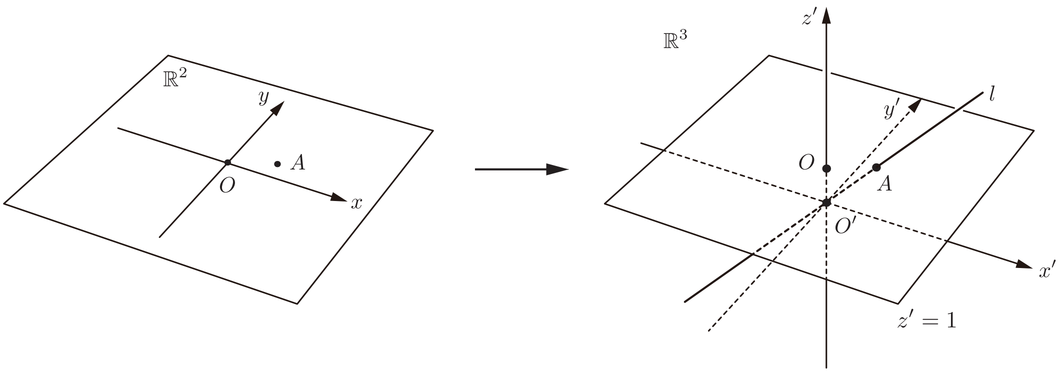

図 7　同次座標の幾何学的解釈

2.2　アフィン変換の同次座標系による表現

以後，同次座標 $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_0)$ を列ベクトルとして表すときは

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

と角括弧で表すとする．同次座標の性質より

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\alpha_1 \\ t\alpha_2 \\ t\alpha_3 \\ t\alpha_0 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

である（ただし $t \neq 0$）．

2.2.1　平行移動

ここでは，$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 方向への平行移動

$$f_{\vec{u}} : \vec{a} \mapsto \vec{a} + \vec{u}$$

が同次座標系でどう表されるか考える．

点 A の直交座標を (a_1, a_2, a_3)，同次座標を $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_0)$ とする（つまり $a_i = \alpha_i/\alpha_0$）．このとき，

$$f_{\vec{u}}(A) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + u_1 \\ a_2 + u_2 \\ a_3 + u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1/\alpha_0 + u_1 \\ \alpha_2/\alpha_0 + u_2 \\ \alpha_3/\alpha_0 + u_3 \end{pmatrix}.$$

これを同次座標になおし，同次座標の性質を用いると，

$$f_{\vec{u}}(A)=\begin{bmatrix}\alpha_1/\alpha_0+u_1\\ \alpha_2/\alpha_0+u_2\\ \alpha_3/\alpha_0+u_3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_0u_1\\ \alpha_2+\alpha_0u_2\\ \alpha_3+\alpha_0u_3\\ \alpha_0\end{bmatrix}$$

となる．このとき右辺は

$$\begin{pmatrix}1&0&0&u_1\\0&1&0&u_2\\0&0&1&u_3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_0\end{bmatrix}$$

と，行列の積で表すことができる．

平行移動の同次座標表示

点 A の同次座標を $(\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3:\alpha_0)$ とする．このとき，$\vec{u}$ 方向への平行移動は $f_{\vec{u}}$ は

$$f_{\vec{u}}(A)=\left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & \vec{u}\\ \hline 0&0&0&1\end{array}\right)\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_0\end{bmatrix}$$

と表すことができる．

問題 2.1. $\vec{u},\vec{v}$ を空間ベクトルとする．このとき，以下の問に答えなさい．

(1) 4 次正方行列の積 $\left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & \vec{u}\\ \hline 0&0&0&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & \vec{v}\\ \hline 0&0&0&1\end{array}\right)$ を求めなさい．

(2) 4 次正方行列 $\left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & \vec{u}\\ \hline 0&0&0&1\end{array}\right)$ の逆行列を求めなさい．

2.2.2 線形変換

ここでは，3 次正方行列 $M=(m_{ij})$ に対し，線形変換

$$f_M:\vec{a}\mapsto M\vec{a}$$

が同次座標系でどう表されるか考える．

点 A の直交座標を (a_1, a_2, a_3)，同次座標を $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_0)$ とする（つまり $a_i = \alpha_i/\alpha_0$）．このとき，

$$f_M(A) = M \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} m_{1j}a_j \\ \sum_{j=1}^{3} m_{2j}a_j \\ \sum_{j=1}^{3} m_{3j}a_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3}(m_{1j}\alpha_j)/\alpha_0 \\ \sum_{j=1}^{3}(m_{2j}\alpha_j)/\alpha_0 \\ \sum_{j=1}^{3}(m_{3j}\alpha_j)/\alpha_0 \end{pmatrix}.$$

これを同次座標になおし，同次座標の性質を用いると，

$$\begin{aligned} f_M(A) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{3}(m_{1j}\alpha_j)/\alpha_0 \\ \sum_{j=1}^{3}(m_{2j}\alpha_j)/\alpha_0 \\ \sum_{j=1}^{3}(m_{3j}\alpha_j)/\alpha_0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{3} m_{1j}\alpha_j \\ \sum_{j=1}^{3} m_{2j}\alpha_j \\ \sum_{j=1}^{3} m_{3j}\alpha_j \\ \alpha_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる．

線形変換の同次座標表示

点 A の同次座標を $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_0)$ とする．このとき，3 次正方行列 M が生成する線形変換 f_M は

$$f_M(A) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

と表すことができる．

問題 **2.2.** M, N を 3 次正方行列とする．このとき，以下の問に答えなさい．

(1) 4 次正方行列の積 $\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & N & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ を求めなさい．

(2) M が正則行列のとき，4 次正方行列 $\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ の逆行列を求めなさい．

2.3 アフィン変換

M を 3 次正方行列，$\vec{u}$ を空間ベクトルとすると，アフィン変換

$$f : \vec{a} \mapsto M\vec{a} + \vec{u}$$

は線形変換 f_M と平行移動 $f_{\vec{u}}$ の合成変換 $f = f_{\vec{u}} \circ f_M$ である．したがって，2.1 節，2.2 節の結果から以下のことがわかる．

アフィン変換の同次座標表示

点 A の同次座標を $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_0)$ とする．このとき，3 次正方行列 M および空間ベクトル $\vec{u}$ が生成するアフィン変換 $f(\vec{a}) = M\vec{a} + \vec{u}$ は

$$f(A) = \left(\begin{array}{ccc|c} & M & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

と表すことができる．

問題 2.3. M を 3 次正方行列，$\vec{u}$ を空間ベクトルとする．このとき，4 次正方行列の積

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ および } \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

を求めなさい．

問題 2.4. M を正則な 3 次正方行列，$\vec{u}$ を空間ベクトルとする．このとき，4 次正方行列

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & M & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

の逆行列を求めなさい．