同次座標系と透視投影

3 次元の物体（図形）を紙に書き写したり，コンピューターのモニターに映すなど，2 次元の媒体で表現することを，ここでは投影，または射影とよぶことにします．数学的に述べると，投影とは 3 次元数空間 $\mathbb{R}^3$ から平面 π への写像です．第 1 節では，もっとも簡単な投影である平行投影と，目に映る像を正確に表現する方法として発展した透視投影について説明します．第 2 節で同次座標系という新しい座標系を導入し，第 3 節で透視投影を同時座標系で表現する方法を説明します．

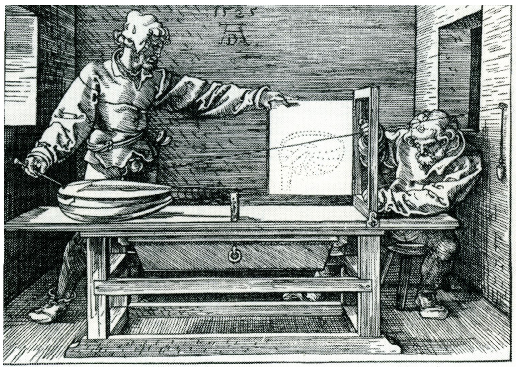

図 1 「リュートを描く人」(Albrecht Dürer, 1525 年)

1 投影（射影）

1.1 平行投影

定義 1.1. π を $\mathbb{R}^3$ 内の平面，$\vec{v}\,(\neq \vec{0})$ を π に平行でないベクトルとする．このとき，空間上の点 P に対し，P を通り，方向ベクトルが $\vec{v}$ の直線と π との交点を $\Psi_{\vec{v}}(P)$ とする．このようにして定まる写像 $\Psi_{\vec{v}} : \mathbb{R}^3 \to \pi$ を **$\boldsymbol{\pi}$ への $\boldsymbol{\vec{v}}$ 方向の平行投影**とよぶ．

投影（写像）の終域である平面 π のことを，その投影の投影面とよぶ．

ベクトル $\vec{v}$ の成分を $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$，投影面 π の方程式を $ax + by + cz = d$ とし，$\Psi_{\vec{v}}$ による点 $P(p_1, p_2, p_3)$ の像 $\Psi_{\vec{v}}(P)$ を求めてみよう．

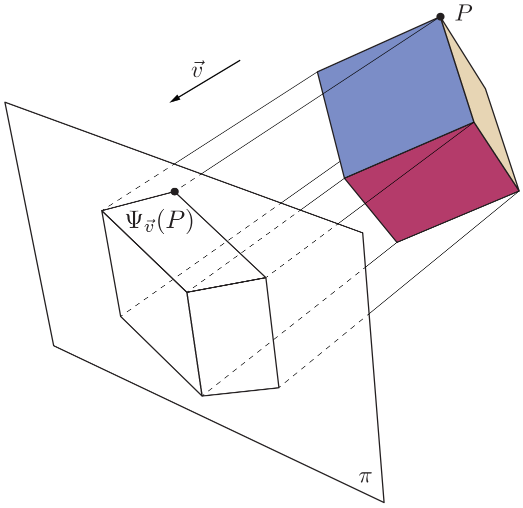

図 2　平行投影

点 P を通り，方向ベクトルが $\vec{v}$ の直線を l とする．$\Psi_{\vec{v}}(P)$ は l 上の点であるから，ある実数 t を用いて

$$\Psi_{\vec{v}}(P) = \vec{p} + t\vec{v} = (p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, p_3 + tv_3) \tag{1.1}$$

と表すことができる（$\vec{p}$ は点 P の位置ベクトル）．さらに，$\Psi_{\vec{v}}(P)$ は平面 π 上の点であるから，(1.1) の実数 t は

$$a(p_1 + tv_1) + b(p_2 + tv_2) + c(p_3 + tv_3) = d \tag{1.2}$$

を満たす．(1.2) を t について解くと

$$t = \frac{d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)}{av_1 + bv_2 + cv_3} \tag{1.3}$$

を得る．したがって，

$$\Psi_{\vec{v}}(P) = \vec{p} + \left\{ \frac{d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)}{av_1 + bv_2 + cv_3} \right\} \vec{v} \tag{1.4}$$

となる．投影面 π の法線ベクトルを $\vec{n} = (a, b, c)$ とおくと，(1.4) は

$$\Psi_{\vec{v}}(P) = \vec{p} + \left(\frac{d - \vec{p} \cdot \vec{n}}{\vec{v} \cdot \vec{n}} \right) \vec{v} \tag{1.5}$$

と表すことができる．

平行投影

投影面 $\pi : ax+by+cz=d$ への $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 方向の平行投影 $\Psi_{\vec{v}}$ は

$$\Psi_{\vec{v}}(\vec{p}) = \vec{p} + \left\{ \frac{d-(ap_1+bp_2+cp_3)}{av_1+bv_2+cv_3} \right\} \vec{v} = \vec{p} + \left(\frac{d-\vec{p}\cdot\vec{n}}{\vec{v}\cdot\vec{n}} \right) \vec{v}$$

で与えられる（ただし，$\vec{n}$ は π の法線ベクトル）.

特に，$\vec{v}$ が投影面 π に直交する（つまり，$\vec{v}$ と π の法線ベクトル $\vec{n}$ が平行である）とき，平行投影 $\Psi_{\vec{v}}$ を π への直交射影（または正射影）とよぶ.

問題 1.1. 投影面 $\pi : ax+by+cz=d$ への直交射影を Ψ_π とする．$\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$ の Ψ_π による像 $\Psi_\pi(\vec{p})$ の成分を求めなさい.

問題 1.2. xy 平面を π とし，π への直交射影 Ψ_π とする．$\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$ の Ψ_π による像 $\Psi_\pi(\vec{p})$ の成分を求めなさい.

平行投影は平行な 2 直線を平行な 2 直線に移す.

図 3 「遊興風俗図屏風（部分）」(作者不明, 17 世紀)

定理 1.2. $\Psi_{\vec{v}}$ を投影面 π への $\vec{v}$ 方向の平行投影とし，l_1, l_2 を $\vec{v}$ に平行ではない 2 つの直線とする．このとき，l_1, l_2 が平行ならば，$\Psi_{\vec{v}}$ による像 $\Psi_{\vec{v}}(l_1), \Psi_{\vec{v}}(l_2)$ も平行である.

Proof. 直線 l_i は点 $\vec{q}_i$ を通り，方向ベクトルが $\vec{u}$ であるとする（$i=1,2$. l_1 と l_2 は平行だから方向ベクトルは同じであることに注意せよ）．l_i 上の点 $\vec{p}_i$ は媒介変数 s を用いると

$\vec{p_i} = \vec{q_i} + s\vec{u}$ と表すことができる．この点 $\vec{p_i}$ を $\Psi_{\vec{v}}$ で移す，つまり，(1.10) に代入すると

$$\begin{aligned}\Psi_{\vec{v}}(\vec{p_i}) =& \vec{p_i} + \left(\frac{d - \vec{p_i}\cdot\vec{n}}{\vec{v}\cdot\vec{n}}\right)\vec{v} \\ =& \vec{q_i} + s\vec{u} + \left(\frac{d - (\vec{q_i} + s\vec{u})\cdot\vec{n}}{\vec{v}\cdot\vec{n}}\right)\vec{v} \\ =& \left(\vec{q_i} + \frac{d - \vec{q_i}\cdot\vec{n}}{\vec{v}\cdot\vec{n}}\vec{v}\right) + s\left(\vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{\vec{v}\cdot\vec{n}}\vec{v}\right)\end{aligned}$$

となる．これは l_1, l_2 の $\Psi_{\vec{v}}$ による像 $\Psi_{\vec{v}}(l_1), \Psi_{\vec{v}}(l_2)$ がともに方向ベクトル

$$\vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{\vec{v}\cdot\vec{n}}\vec{v}$$

の直線であることを意味する．つまり，この 2 直線は平行である． □

問題 1.3. $\Psi_{\vec{v}}$ を投影面 π への $\vec{v}$ 方向の平行投影とし，l を方向ベクトルが $\vec{v}$ と平行な直線とする．このとき，$\Psi_{\vec{v}}$ による l の像はどのような図形か答えなさい．

1.2 透視投影

定義 1.3. π を $\mathbb{R}^3$ 内の平面，V を π 上にない点とする．このとき， 空間上の点 P に対し，P と V を通る直線と π との交点を $\Phi_V(P)$ とする．このようにして定まる写像 $\Phi_V : \mathbb{R}^3 \to \pi$ を視点が $\boldsymbol{V}$，投影面が $\boldsymbol{\pi}$ の透視投影とよぶ．

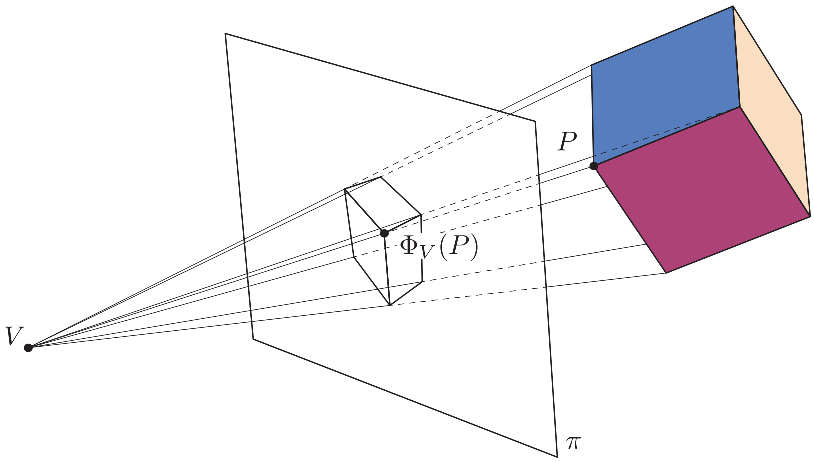

図 4　透視投影

視点を $V(v_1, v_2, v_3)$，投影面 π の方程式を $ax + by + cz = d$ とし，Φ_V による点 $P(p_1, p_2, p_3)$ の像 $\Phi_V(P)$ を求めてみよう．

2 点 P, V を通る直線を l とする．$\Phi_V(P)$ は l 上の点であるから，ある実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\Phi_V(P) =& \vec{p} + t(\vec{v} - \vec{p}) \\ =& (p_1 + t(v_1 - p_1), p_2 + t(v_2 - p_2), p_3 + t(v_3 - p_3)).\end{aligned} \tag{1.6}$$

と表すことができる（$\vec{p}, \vec{v}$ はそれぞれ点 P, V の位置ベクトル）．さらに，$\Phi_V(P)$ は平面 π 上の点であるので，(1.6) の実数 t は

$$a\{p_1 + t(v_1 - p_1)\} + b\{p_2 + t(v_2 - p_2)\} + c\{p_3 + t(v_3 - p_3)\} = d \tag{1.7}$$

を満たす．(1.7) を t について解くと

$$t = \frac{d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)}{a(v_1 - p_1) + b(v_2 - p_2) + c(v_3 - p_3)} \tag{1.8}$$

を得る．したがって，

$$\Phi_V(P) = \vec{p} + \left\{ \frac{d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)}{a(v_1 - p_1) + b(v_2 - p_2) + c(v_3 - p_3)} \right\} (\vec{v} - \vec{p}) \tag{1.9}$$

となる．投影面 π の法線ベクトルを $\vec{n}$ とおくと，(1.9) は

$$\Psi_{\vec{v}}(P) = \vec{p} + \left\{ \frac{d - \vec{p} \cdot \vec{n}}{(\vec{v} - \vec{p}) \cdot \vec{n}} \right\} (\vec{v} - \vec{p}) \tag{1.10}$$

と表すことができる．

透視投影

投影面を $\pi : ax + by + cz = d$，視点を $V(v_1, v_2, v_3)$ とする透視投影 Φ_V は

$$\begin{aligned}\Phi_V(\vec{p}) =& \vec{p} + \left\{ \frac{d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)}{a(v_1 - p_1) + b(v_2 - p_2) + c(v_3 - p_3)} \right\} (\vec{v} - \vec{p}) \\ =& \vec{p} + \left\{ \frac{d - \vec{p} \cdot \vec{n}}{(\vec{v} - \vec{p}) \cdot \vec{n}} \right\} (\vec{v} - \vec{p})\end{aligned}$$

で与えられる（ただし，$\vec{n}$ は π の法線ベクトル）．

問題 1.4. 視点を $V(v_1, v_2, v_3)$，投影面を yz-平面とする透視投影を Φ_V とする．Φ_V による点 $P(p_1, p_2, p_3)$ の像 $\Phi_V(P)$ の成分を求めなさい．

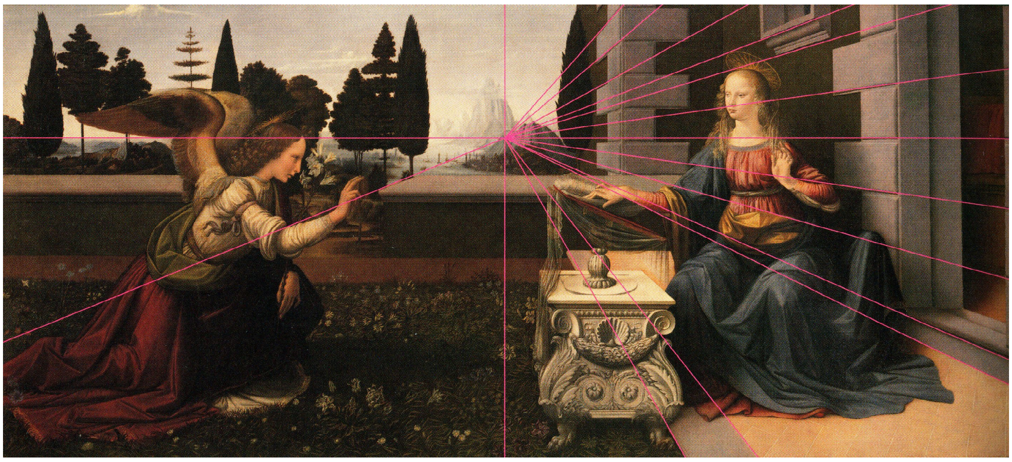

図 5 「受胎告知」(Leonardo da Vinci, 1472-1475 年)

平行投影によって平行な直線はふたたび平行な直線に移るが，透視投影の場合，平行な 2 直線の像がある点で交わることがある．平行線の像が交わる点のことを消失点とよぶ．図 5 では消失点が 1 点現れている．

透視投影においては，投影する対象物と視点，投影面の関係によって消失点は 1 個から 3 個現れる．

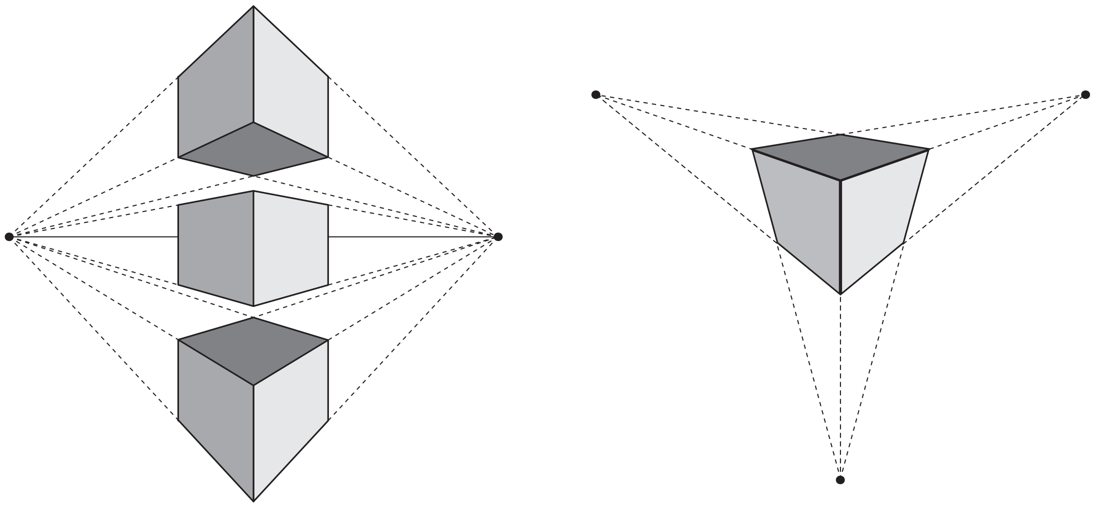

図 6 消失点が 2 つ現れる「2 点透視図法」(左) と 3 つ現れる「3 点透視図法」(右)

問題 1.5. 空間内の直線が透視投影によってどのような図形に移るか，考察しなさい．