1 平面における主な線形変換

1.1 拡大と縮小，相似変換

- $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

  (1) $k > 1$ のとき，x 軸方向の拡大

  (2) $0 < k < 1$ のとき，x 軸方向の縮小

  (3) $k < 0$ のとき，x 軸方向に "裏返して" 拡大，縮小

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

  (1) $k > 1$ のとき，y 軸方向の拡大

  (2) $0 < k < 1$ のとき，y 軸方向の縮小

  (3) $k < 0$ のとき，y 軸方向に "裏返して" 拡大，縮小

- $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

  (1) $|k| > 1$ のとき，相似拡大

  (2) $|k| < 1$ のとき，相似縮小

1.2 せん断

行列 $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ によって定まる線形変換をせん断という（$k \in \mathbf{R}$）.

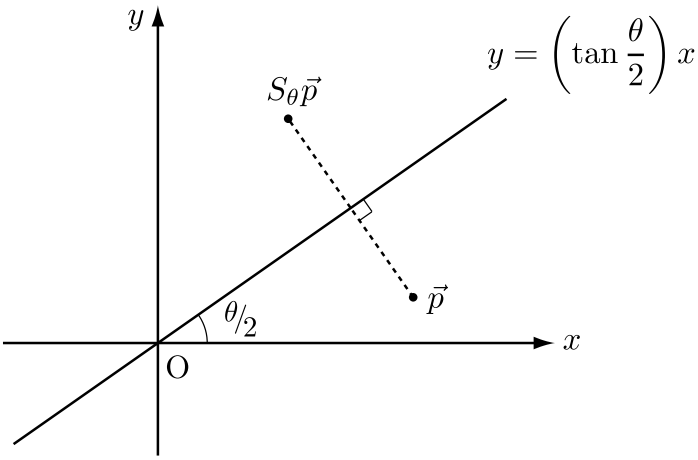
1.3 原点を中心とする回転変換

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

この授業の情報源：http://www.math.sie.dendai.ac.jp/~hiroyasu/2012/im3-s/

1.4 直線 $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)x$ に関する鏡映変換

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$



2 空間における主な線形変換

2.1 拡大・縮小，相似変換

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

2.2 せん断

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3　回転変換

(1) z 軸を回転軸とする回転；$R_{z(\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) x 軸を回転軸とする回転；$R_{x(\theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(3) y 軸を回転軸とする回転；$R_{y(\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$

(4) 原点を通り，方向ベクトルが $\vec{v} = (a, b, c)$ の直線を回転軸とする回転；

$$R_{(a,b,c;\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)a^2 & (1-\cos\theta)ab - c\sin\theta & (1-\cos\theta)ca + b\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ab + c\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)b^2 & (1-\cos\theta)bc - a\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ca - b\sin\theta & (1-\cos\theta)bc + a\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)c^2 \end{pmatrix}$$

ただし，$a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

2.4　平面 $ax + by + cz = 0$ に関する鏡映変換

$$S_{(a,b,c)} = \begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}$$

ただし，$a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

問題.　行列 $S_{(a,b,c)}$（ただし，$a^2 + b^2 + c^2 = 1$）について，以下の問に答えなさい.

(1) $\vec{p} = (x, y, z)$ とおき，$S_{(a,b,c)}\vec{p}$ を成分表示しなさい.

(2) ベクトル $(\vec{p} - S_{(a,b,c)}\vec{p})$ がベクトル (a, b, c) と平行であることを確かめなさい.

(3) 点 $\vec{p}$ と点 $S_{(a,b,c)}\vec{p}$ の中点 $\dfrac{1}{2}\left(\vec{p} + S_{(a,b,c)}\vec{p}\right)$ が平面 $ax + by + cz = 0$ 上の点であることを確かめなさい.

(4) $S_{(a,b,c)}$ が直交行列であることを示しなさい.

(5) $S_{(a,b,c)}$ の行列式を求めなさい.