問題 2.7. 正方行列 A_1, A_2 とベクトル $\vec{d_1}, \vec{d_2}$ に対し，アフィン変換 f, g を

$$f(\vec{p}) = A_1\vec{p} + \vec{d_1}, \qquad g(\vec{p}) = A_2\vec{p} + \vec{d_2}$$

と定義する．このとき，合成変換 $f \circ g$ および $g \circ f$ を $A_1, A_2, \vec{d_1}, \vec{d_2}$ を用いて表しなさい[*1]．

問題 2.8. 正方行列 A とベクトル $\vec{d}$ を用いて

$$f(\vec{p}) = A\vec{p} + \vec{d}$$

と定義されるアフィン変換 f が全単射のとき，f の逆変換 f^{-1} を $A, \vec{d}$ を用いて表しなさい[*2]．

問題 2.9. 行列

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \rho_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を表現行列とする線形変換をそれぞれ f_θ，g_θ，h とする．つまり，

$$f_\theta(\vec{p}) = R_\theta\vec{p}, \quad g_\theta(\vec{p}) = \rho_\theta\vec{p}, \quad h(\vec{p}) = B\vec{p}.$$

このとき，次の問に答えなさい．

(1) $f_\theta \circ f_\varphi = f_{\theta+\varphi}$ を示しなさい．

(2) $g_\theta \circ g_\varphi = f_{\theta-\varphi}$ を示しなさい[*3]．

(3) $f_\theta^{-1} = f_{-\theta}$ を示しなさい．

(4) $g_\theta^{-1} = g_\theta$ を示しなさい．

(5) h はある直線に関する鏡映である．どういう直線か説明しなさい[*4]．

(6) $f_\theta = g_\theta \circ h$ を示しなさい．

[*1] 5 月 21 日のノートを参考にせよ

[*2] 5 月 21 日のノートを参考にせよ

[*3] 第 2 回小テストの問題 4 を変換の言葉で言い替えただけ．

[*4] 5 月 21 日の授業で説明しました．