情報数学 III 期末試験 解答

$\boxed{1}$ $f(x,y)=x^2+xy+y^2+5x+y+6$ とおくと，$f(\bar{x}-3,\bar{y}+1)=\bar{x}^2+\bar{x}\bar{y}+\bar{y}^2-1$ が成り立つ．つまり，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と座標変換することにより（4 点），2 次曲線 $f(x,y)=0$ は

$$\bar{x}^2+\bar{x}\bar{y}+\bar{y}^2=1 \tag{1}$$

となる（1 次の項が消える）．（4 点）

方程式 (1)は行列を用いて

$$\begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}=1 \tag{2}$$

と書ける．2 次の項の係数行列を $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，A の固有多項式は $f_A(t)=t^2-2t+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}(2t-1)(2t-3)$ であるから，A の固有値は $\dfrac{1}{2}$ と $\dfrac{3}{2}$ （2 点），固有ベクトルはそれぞれ $c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である（各 2 点）．ただし，c は任意の実数とする．ノルムが 1 の固有ベクトルを並べて行列を $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ をつくり，$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ と座標変換すると方程式 (2)は

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}=1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2}\tilde{x}^2+\frac{3}{2}\tilde{y}^2=1 \tag{3}$$

となる（2 点）．これは <u>楕円</u> である．（4 点）

なお，$\det(A)$ を計算し（2 点），さらに「$\det(A)\neq 0$ であるから，この 2 次曲線は有心 2 次曲線である」ことを述べていれば 5 点加点する．

$\boxed{2}$ 視点の同次座標を $(8:-1:-1:1)$ とすると，yz-平面 $(x=0)$ への透視投影 Φ_V は行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

の積として表すことができる（5 点）．投影する 4 点の同時座標を $A(-1;-2:-3:1)$，$B(-2:-1:2:1)$，$C(-3:3:-2:1)$，$D(-10:-1:0:2)$ とすると，4 点の Φ_V による像の同次座標は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -17 \\ -25 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 14 \\ 10 \end{bmatrix},$$

2012.7.23（担当：佐藤 弘康）

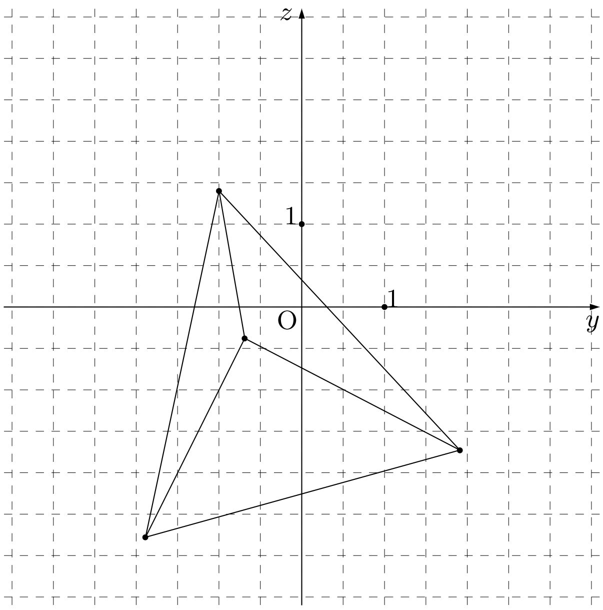
情報数学 **III** 期末試験 解答

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 21 \\ -19 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} -10 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -18 \\ -10 \\ 26 \end{bmatrix}$$

となる（各 1 点）．したがって，Φ_V による像の直交座標は

$$\Phi_V(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{17}{9} \\ -\frac{25}{9} \end{pmatrix}, \quad \Phi_V(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}, \quad \Phi_V(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{21}{11} \\ -\frac{19}{11} \end{pmatrix}, \quad \Phi_V(D) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{9}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

となる（各 1 点）．4 点 $ABCD$ を頂点とする四面体の像のワイヤーフレームは以下のようになる（点を正しくプロット出来ていれば各 1 点，四面体のワイヤーフレームになっていれば更に 3 点）．



$\boxed{\mathbf{3}}$ （問題の条件を満たす M と $\vec{u}$ の選び方は一意的ではない）

平面 $x-2y-z=1$ の法線ベクトルを $\vec{n}=(1,-2,-1)$ とおくと，M の第 1 列 $\vec{m}_1$ は $\vec{n}$ に平行な単位ベクトルであるから，たとえば，$\vec{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)$ とできる (5 点)．M の第 2 列 $\vec{m}_2$ は $\vec{m}_1$ に直行する単位ベクトルであるから，たとえば $\vec{m}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ ととる（5 点）．M の第 3 列 $\vec{m}_3$ は $\vec{m}_1$ と $\vec{m}_2$ の両方に直交する単位ベクトルなので，たとえば $\vec{m}_3 = \vec{m}_1 \times \vec{m}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)$ とすればよい（5 点）．したがって，

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

ベクトル $\vec{u}$ は，$\vec{u}\cdot\vec{n}=1$ を満たせばいいので，例えば，$(1,0,0)$，$(0,0,-1)$，$(2,0,1),\ldots$ など (5 点)．