事実

任意の有理関数 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ の不定積分は **i)** 有理関数，**ii)** 対数関数（log），**iii)** 逆正接関数（arctan）を用いて表される．

- $f(x), g(x), \ldots$ を実数係数多項式とする．つまり

$$f(x) = \alpha_N\, x^N + \alpha_{N-1}\, x^{N-1} + \cdots + \alpha_1\, x + \alpha_0. \qquad (\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots, N)$$

- 多項式 $f(x)$ が上の式で表されるとき，係数 $a_N \neq 0$ を満たす最大の N を，この多項式の次数といい，$\mathbf{deg}\,(\boldsymbol{f})$ と書く．
- どんな実数係数多項式も

$$\begin{aligned} f(x) = \alpha_N (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_m)^{k_m} \\ \times (x^2+b_1x+c_1)^{l_1}(x^2+b_2x+c_2)^{l_2}\cdots(x^2+b_nx+c_n)^{l_n} \end{aligned} \tag{0.1}$$

と因数分解できる[*1]（$a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$，$n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$k_i, l_j \in \mathbb{N}$[*2]）．ただし，$x^2 + b_i x + c_i = 0$ は実数解を持たないとする．

- $f(x)$ と $g(x)$ は 共通因数を持たず[*3]，$\deg(g) < \deg(f)$ を満たす[*4]と仮定する．

定理 0.1. $f(x)$ が (0.1) のように因数分解されるとする．このとき，有理関数 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ は

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{f(x)} =& \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)} \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{A_{m1}}{(x-a_m)^{k_m}} + \frac{A_{m2}}{(x-a_m)^{k_m-1}} + \cdots + \frac{A_{mk_m}}{(x-a_m)} \\ &+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1-1}} + \cdots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2+b_1x+c_1)} \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{B_{n1}x + C_{n1}}{(x^2+b_nx+c_n)^{l_n}} + \frac{B_{n2}x + C_{n2}}{(x^2+b_nx+c_n)^{l_n-1}} + \cdots + \frac{B_{nl_n}x + C_{nl_n}}{(x^2+b_nx+c_n)} \end{aligned} \tag{0.2}$$

の形で表すことができる（A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} は定数）．これを有理関数の標準形という．

[*1] これは実数の範囲における代数学の基本定理である．

[*2] k_i, l_j は $\sum_{i=1}^{m} k_i + 2\sum_{j=1}^{n} l_j = \deg(f)$ を満たす．

[*3] 共通因数を持つ場合は約分すればよい．

[*4] $\deg(g) \geq \deg(f)$ ならば，$\dfrac{g(x)}{f(x)} = h(x) + \dfrac{\tilde{g}(x)}{f(x)}$ と除算した後，$\dfrac{\tilde{g}(x)}{f(x)}$ を考えればよい．

標準形を求めるには，i) 係数比較，ii) 代入法，iii) アルゴリズムを使う 3 つの方法がある（[1, p.90–95]）.

定理 0.1 の結果から，有理関数の不定積分は

$$\frac{A}{(x-\alpha)^n}, \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n} \tag{0.3}$$

の不定積分の和に分解できることがわかる．特に，(0.3) の後者は置換積分によって

$$\frac{B'x}{(x^2+\beta^2)}, \qquad \frac{C'}{(x^2+\beta^2)^n} \tag{0.4}$$

の和に分解できる．つまり，次の 3 つ

$$\frac{1}{(x-\alpha)^n}, \qquad \frac{x}{(x^2+\beta^2)^n}, \qquad \frac{1}{(x^2+\beta^2)^n} \tag{0.5}$$

の不定積分がわかれば，任意の有理関数の不定積分を求めることができる．

定理 0.2 ([2, 命題 6.2])**.** $n \geq 1$ を自然数，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$ のとき，次のことが成り立つ．

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}} & (n > 1 \text{ のとき}) \\ \log|x-\alpha| & (n = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{(x^2+\beta^2)^n} dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{2(n-1)(x^2+\beta^2)^{n-1}} & (n > 1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{2}\log(x^2+\beta^2) & (n = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$I_n := \int \frac{dx}{(x^2+\beta^2)^n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(n-1)\beta^2}\left\{\dfrac{x}{(x^2+\beta^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right\} & (n > 1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{\beta}\arctan\dfrac{x}{\beta} & (n = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

参考文献

[1] 小林昭七，微分積分読本（1 変数），裳華房 (2000)

[2] 杉浦光夫，解析入門 I，東京大学出版会 (1980)