数学科教育法 レポート⑪ 解答

課題 11-1

(1) $A = \{p \in \mathbb{Q} \mid -1 < p < 1\}$ とおく．十分小さい任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$1-\varepsilon < p < 1$ を満たす有理数 p が存在するので $\sup A = 1$（有理数の稠密性）．同様に $\inf A = -1$．$\max A, \min A$ は存在しない．

(2) $\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 1$．$\sup \mathbb{N}$，$\max \mathbb{N}$ は存在しない（アルキメデスの原理）．

(3) $B = \{a_n \mid a_n$ は π の小数第 n 位までとった近似値 $(n \in \mathbb{N})\}$．
$\sup B = \pi$，$\inf B = \min B = 3.1$．$\max B$ は存在しない（π は無理数だから）．

課題 11-2

- 「$b \in \mathbb{R}$ が集合 A の上界である」とは，「$\boldsymbol{\forall a \in A\ (b \geq a)}$」が成り立つことである．
- 「$a_0 \in \mathbb{R}$ が上に有界な集合 A の上限である」とは，「a_0 は A の上界」かつ「$\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A\ (a_0 - \varepsilon < a)$」が成り立つことである．
- 「$b \in \mathbb{R}$ が集合 A の下界である」とは，「$\forall a \in A\ (b \leq a)$」が成り立つことである．
- 「$a_0 \in \mathbb{R}$ が下に有界な集合 A の下限である」とは，「**$\boldsymbol{a_0}$ は $\boldsymbol{A}$ の下界**」かつ「$\boldsymbol{\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A\ (a < a_0 + \varepsilon)}$」が成り立つことである．

課題 11-3

「空でなく，下の有界な $\mathbb{R}$ の部分集合は必ず下限を持つ」

（使える道具は切断を用いた「実数の連続性の公理」だけなので，これを使う以外ない）

$C \subset \mathbb{R}$ を下に有界な部分集合とする（$C \neq \emptyset$ を仮定）．C の下界全体を A とし，$B = \mathbb{R} - A$ とする．このとき，

Claim 1：(A, B) は $\mathbb{R}$ の切断である．

上で定義した部分集合の組 (A, B) が実数の切断であるためには

- (i) $A \neq \emptyset$,　(ii) $B \neq \emptyset$,　(iii) $A \cap B = \emptyset$,　(iv) $A \cup B = \mathbb{R}$,
- (v) $a \in A, b \in B$ ならば，常に $a < b$

が成り立たなくてはならない．C は下に有界（下界が存在する）だから (i) は明らか．$C \subset B$ であるから (ii) も成り立つ．A と B の定め方から (iii) と (iv) も明らか．

（(v) の証明）(v) を否定して矛盾を導こう（背理法）．(v) を否定すると「$a \geq b$ を満たすような $a \in A$ と $b \in B$ の組が少なくとも 1 つ存在する」となる．ここで A は C の下界全体なので，$a \geq b$ ならば b も C の下界となり $b \in A$ となるがこれは「(iii)$A \cap B = \emptyset$」に反する．

以上で Claim 1 が示された．

(A, B) が $\mathbb{R}$ の切断であるから，実数の連続性より

(1) A の最大元が存在し，B の最小元は存在しない．

(2) A の最大元が存在せず，B の最小元は存在する．

のいずれか一方が成り立つ．(1) が成り立てば，A の最大元が C の下限なので，以下を示す；

Claim 2：(2) はの場合は起こり得ない．

x を B の最小元とする．$x \notin A$ であるから $c < x$ を満たす $c \in C$ が存在する（どんな $c \in C$ に対しても，$x \leq c$ なら，x は C の下界となり，$x \in A$ となる）．このとき，$c < \frac{c+x}{2} < x$ であるから $\frac{c+x}{2} \in B$ となるが，これは x が B の最小元であることに矛盾する．

以上で Claim 2 が示され，課題の命題が示された．

（**2011.7.6** 担当：佐藤）