実数の定義

数学科教育法 資料

以下の 3 つの公理系を満たし，少なくとも 2 つの元を含む集合 $\mathbb{R}$ の元を実数という．

公理 (I)：$\mathbb{R}$ は可換体である

$\mathbb{R}$ には 2 つの演算「$+$」と「$\times$」が定義され，以下を満たす；

(1) 任意の 2 つ元 $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，その和 $x+y \in \mathbb{R}$ が定まり，以下の性質を満たす．
- (a) 交換法則：$x+y=y+x$
- (b) 結合法則：$(x+y)+z=x+(y+z)$
- (c) 和に関する単位元の存在：
  任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $x+0=x$ を満たす数 $0 \in \mathbb{R}$ が存在する．
- (d) 和に関する逆元の存在：
  任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$x+y=0$ を満たす $y \in \mathbb{R}$ が存在する（y を x の逆符号の数とよび，$y=-x$ と書く）．

(2) 任意の 2 つ元 $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，その積 $xy \in \mathbb{R}$ が定まり，以下の性質を満たす．
- (a) 交換法則：$xy=yx$
- (b) 結合法則：$(xy)z=x(yz)$
- (c) 積に関する単位元の存在：
  任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $x \cdot 1=x$ を満たす数 $1 \in \mathbb{R}$ が存在する．
- (d) 積に関する逆元の存在：
  任意の $x \in \mathbb{R}$（ただし，$x \neq 0$）に対して，$xy=1$ を満たす $y \in \mathbb{R}$ が存在する（y を x の逆数とよび，$y=\frac{1}{x}$ と書く）．

(3) 和と積は分配法則を満たす：$x(y+z)=xy+xz$.

公理 (II)：演算と両立する大小関係

任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，次のうち 1 つだけが成り立つ；

$$a<b, \qquad a=b, \qquad a>b$$

さらに

(1)	$x<y$ かつ $y<z$	ならば，	$x<z$	である．
(2)	$x<y$	ならば，	$x+z<y+z$	である．
(3)	$x<y$ かつ $z>0$	ならば，	$xz<yz$	である．

公理 (III)：実数の連続性

実数の任意の切断 (A, B) に対し，必ず次の 2 つのうちのどちらか一方が成り立つ：

(1) A に最大数が存在し，B に最小数が存在しない．

(2) A に最大数が存在せず，B に最小数が存在する．

（**2011.6.22** 担当：佐藤）

実数の連続性に関する命題

数学科教育法 資料

(D) 実数の任意の切断 (A, B) に対し，必ず次の 2 つのうちのどちらか一方が成り立つ：

(1) A に最大数が存在し，B に最小数が存在しない.

(2) A に最大数が存在せず，B に最小数が存在する.

(W) 空でなく，上に（下に）有界な $\mathbb{R}$ の部分集合は上限（下限）を持つ.（命題 1.1）

(A) （アルキメデスの原理）$a, b > 0$ とするとある自然数 n に対して $na > b$ が成り立つ.（命題 1.4）

(M) 上に有界な単調増加数列 $\{x_n\}$ は $\sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に収束する．下に有界な単調減少数列 $\{x_n\}$ は $\inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に収束する.（命題 1.11）

(K) （区間縮小法）$\{I_n\}$ が実数の空でない有界閉区間の単調減少列ならば，すべての I_n に属する点が存在する.（命題 1.12）

(B-W) 有界な数列は収束する部分列を持つ.（命題　1.13）

(C) コーシー列は収束する.（命題 1.15）

上の命題は以下の関係を満たす；

$$\textbf{(D)} \iff \textbf{(W)} \iff \textbf{(M)} \iff \textbf{(K)+(A)} \iff \textbf{(B-W)} \iff \textbf{(C)+(A)}$$

参考文献：「微分積分学 I」（宮島静雄 著，共立出版）

（**2011.6.22** 担当：佐藤）