有理数の性質

数学科教育法 資料

性質 (I)：有理数 $\mathbb{Q}$ は可換体である

有理数 $\mathbb{Q}$ 上の二つの演算「$+$」と「$\times$」が定義され，以下を満たす；

(1) 任意の 2 つ元 $x, y \in \mathbb{Q}$ に対して，その和 $x+y \in \mathbb{Q}$ が定まり，以下の性質を満たす.
- (a) 交換法則：$x+y=y+x$
- (b) 結合法則：$(x+y)+z=x+(y+z)$
- (c) 和に関する単位元の存在：
  任意の $x \in \mathbb{Q}$ に対して $x+0=x$ を満たす数 $0 \in \mathbb{Q}$ が存在する.
- (d) 和に関する逆元の存在：
  任意の $x \in \mathbb{Q}$ に対して，$x+y=0$ を満たす $y \in \mathbb{Q}$ が存在する（y を x の逆符号の数とよび，$y=-x$ と書く）.

(2) 任意の 2 つ元 $x, y \in \mathbb{Q}$ に対して，その積 $xy \in \mathbb{Q}$ が定まり，以下の性質を満たす.
- (a) 交換法則：$xy=yx$
- (b) 結合法則：$(xy)z=x(yz)$
- (c) 積に関する単位元の存在：
  任意の $x \in \mathbb{Q}$ に対して $x \cdot 1=x$ を満たす数 $1 \in \mathbb{Q}$ が存在する.
- (d) 積に関する逆元の存在：
  任意の $x \in \mathbb{Q}$（ただし，$x \neq 0$）に対して，$xy=1$ を満たす $y \in \mathbb{Q}$ が存在する（y を x の逆数とよび，$y=\frac{1}{x}$ と書く）.

(3) 和と積は分配法則を満たす：$x(y+z)=xy+xz$.

性質 (II)：演算と両立する大小関係

任意の有理数 $a, b \in \mathbb{Q}$ 対して，次のうち 1 つだけが成り立つ；

$$a<b, \qquad a=b, \qquad a>b$$

さらに

(1)	$x<y$ かつ $y<z$	ならば,	$x<z$	である.
(2)	$x<y$	ならば,	$x+z<y+z$	である.
(3)	$x<y$ かつ $z>0$	ならば,	$xz<yz$	である.

（**2011.6.22** 担当：佐藤）