

課題 8-1 自然数とは以下の条件を満たす「集合 \mathbb{N} 」と「1」と「写像 f 」の体系である.

- I. $1 \in \mathbb{N}$.
- II. f は \mathbb{N} から \mathbb{N} への写像である.
- III. $f(n) = 1$ となる $n \in \mathbb{N}$ は存在しない (1 の逆像は空集合である; $f^{-1}(1) = \emptyset$).
- IV. $f(a) = f(b)$ ならば $a = b$ である (写像 f は単射である).
- V. \mathbb{N} の部分集合 M が次の 2 つの条件を満たせば, $M = \mathbb{N}$ である;
 - $\forall_1 \quad 1 \in M$.
 - $\forall_2 \quad n \in M$ ならば $f(n) \in M$ ($f(M) \subset M$).

課題 8-2

以下のような計算をする場合には, その式変形がどのような条件 (公理) に依っているのか注意する必要がある.

(1)

$3 + 2 = 3 + 1'$	$(2 = 1')$
$= (3 + 1)'$	(和の定義: $n + m' = (n + m)'$)
$= (3)'$	(和の定義: $n + 1 = n'$)
$= 4'$	$(3' = 4)$
$= 5$	$(4' = 5)$

(2)

$3 \times 2 = 3 \times 1'$	$(2 = 1')$
$= 3 \times 1 + 3$	(積の定義: $n \times m' = n \times m + n$)
$= 3 + 3$	(積の定義: $n \times 1 = n$)
$= 3 + 2'$	$(3 = 2')$
$= (3 + 2)'$	(和の定義: $n + m' = (n + m)'$)
$= 5'$	((1) の結果: $3 + 2 = 5$)
$= 6$	$(5' = 6)$