東京電機大学 情報環境学部

数学科教育法 第 7 回
§2) 集合論の基礎（３）

平成 23 年 6 月 8 日（水）

担当：佐藤 弘康

（前回のまとめ）

- 集合 X, Y に対し，全単射 $f : X \to Y$ が存在するとき，「X と Y は同等である（$X \approx Y$）」という.
- 有限集合 X と Y が同等ならば，2 つの集合の要素（元）の数は同じである.
- 無限を含め，「要素の数」を表すものを集合の濃度という（「無限」にも大小がある）.

集合の濃度

「集合全体の集まりを同等関係 “$\approx$” によって類別した各同値類を濃度という」

- 集合 A の濃度を $|A|$ と書く.
- 有限集合 $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \approx \{1, 2, \ldots, k\}$ の濃度を k とする.
- $|\emptyset| = 0$ とする.
- $A \approx B$ ならば, $|A| = |B|$ とする.
- 濃度に大小関係を定義する；

  「$A \subset B$」または「A が B' $(\subset B)$ と同等」ならば, $|A| \leq |B|$ とする.

- 無限集合の濃度は $\cdots$

可算濃度

$\boxed{\text{可算（可付番）の濃度}}$ 自然数の集合 $\mathbb{N}$ と同等な集合の濃度（$\aleph_0$ と書く）.

可算集合（可付番集合）の例；

- 可算集合 A に有限個の元を加えた集合 $A \cup \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$
- 可算集合 A, B の和 $A \cup B$
- 整数の集合 $\mathbb{Z}$
- 可算集合 A, B の直積 $A \times B$
- 有理数の集合 $\mathbb{Q}$

実数の集合 $\mathbb{R}$ は可算集合だろうか？

$\mathbb{N}$ の濃度と $\mathbb{R}$ の濃度

実数の集合 $\mathbb{R}$ の濃度を考える；

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ より，$\aleph_0 \leq |\mathbb{R}|$.
- 開区間 $(0, 1)$ と $\mathbb{R}$ は同等である.
  - 任意の 2 つの開区間 (a, b) と (c, d) は同等である.
  - $f(x) = \tan x$ により定義される写像 $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ は全単射である．したがって，$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ と $\mathbb{R}$ は同等である.

しかし,

- $\mathbb{N}$ から開区間 $(0, 1)$ への全単射は存在しない.
  （したがって，$\mathbb{R}$ の濃度は $\aleph_0$ より真に大きい）

カントールの対角線論法

定理

$\mathbb{N}$ から開区間 $(0,1)$ への全単射は存在しない.

証明：背理法（カントールの対角線論法）で示す.

仮に全単射 $\varphi : \mathbb{N} \to (0,1)$ が存在したとする．$k \in \mathbb{N}$ の像 $\varphi(k)$ を

$$\varphi(k) = 0.\, a_{k1}\, a_{k2}\, a_{k3} \cdots$$

と小数表示する．つまり，$a_{kl} \in \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq n \leq 9\}$ で,

$$\begin{aligned} 0.\, a_{k1}\, a_{k2}\, a_{k3} \cdots &= 0.1 \times a_{k1} + 0.01 \times a_{k2} + 0.001 \times a_{k3} + \cdots \\ &= \frac{a_{k1}}{10} + \frac{a_{k2}}{10^2} + \frac{a_{k3}}{10^3} + \cdots \\ &= \sum_{l=1} \frac{a_{kl}}{10^l}. \end{aligned}$$

カントールの対角線論法

$$\varphi(1) = 0.\, a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14}\, a_{15}\ \cdots$$
$$\varphi(2) = 0.\, a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24}\, a_{25}\ \cdots$$
$$\varphi(3) = 0.\, a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34}\, a_{35}\ \cdots$$
$$\varphi(4) = 0.\, a_{41}\, a_{42}\, a_{43}\, a_{44}\, a_{45}\ \cdots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

ここで，$b = 0.\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4\ \cdots \in (0,1)$ を次のように定める；

$$b_i = \begin{cases} 7 & （a_{ii}\text{ が偶数}） \\ 8 & （a_{ii}\text{ が奇数}） \end{cases}$$

すると，$b \notin \varphi(\mathbb{N})$ である．これは $\varphi : \mathbb{N} \to (0,1)$ が全単射であるという仮定と矛盾する．（証明終）

連続濃度

$\boxed{\text{連続濃度}}$ 実数の集合 $\mathbb{R}$ と同等な集合の濃度（$\aleph$ と書く）.

- $\aleph_0 < \aleph$
- 無理数の集合の濃度は $\aleph$.
  - A を無限集合，$B \subset A$ をたかだか可算（有限集合か可算集合）な部分集合とする．このとき，$A - B$ が無限集合ならば，$|A| = |A - B|$ である.
- 平面 $\mathbb{R}^2\,(= \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ と直線 $\mathbb{R}$ は同じ濃度を持つ.
  - $\mathbb{R} \approx (0, 1) \approx (0, 1) \times (0, 1) \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
  - ペアノ曲線

いくつかの問題

- $\aleph_0$ と $\aleph$ の間の濃度は存在するのか？（連続体仮説）
  （$\aleph_0 < |A| < \aleph$ を満たす集合 A は存在するのか？）
  - 答え：わからない！
  - 標準的な枠組み（公理系）のもとでは「正しいとも偽であるとも証明することができない」ことが証明されている.
- $\aleph$ より真に大きい濃度は存在するのか？
  （$|A| > \aleph$ を満たす集合 A は存在するのか？）
  - 答え：冪集合

冪集合

- A の冪集合とは，A のすべての部分集合の集合のこと（2^A と書く）.
  - 例： $A = \{a,\ b,\ c\}$ の冪集合 2^A は

    $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$ の $8\ (= 2^3)$ 個
- 冪集合は A から $\{0, 1\}$ への写像の全体と同一視できる.

  $2^A \approx \{\varphi\,|\,\varphi : A \to \{0, 1\}\,\}$

  （$\varphi : A \to \{0, 1\}$ に対し，$\{x \in A\,|\,\varphi(x) = 1\} \subset A$）
  - 例：上の例の $\{a, c\} \subset A$ は写像 $\varphi : A \to \{0, 1\}$；

$$\varphi(a) = 1, \quad \varphi(b) = 0, \quad \varphi(c) = 1$$

    と対応する.
- $|A| < |2^A|$

冪集合

定理

任意の集合 A に対して，$|A| < |2^A|$ が成り立つ．

証明：A から 2^A への単射は存在する（$x \mapsto \{x\}$）．A から 2^A への全射が存在しないことを背理法で示す．

全射 $g : X \to 2^X$ が存在したとする．

$$A = \{x \mid x \notin g(x)\}$$

とおくと $A \in 2^X$ だから，g の全射性より $g(a) = A$ となる $a \in X$ が存在する．

- $a \in A$ ならば，$a \notin g(a) \, (= A)$ ：矛盾！
- $a \notin A$ ならば，$a \in g(a) \, (= A)$ ：矛盾！（証明終）

冪集合

定理

任意の集合 A に対して，$|A| < |2^A|$ が成り立つ.

- 上の定理から，「いくらでも大きい濃度をもつ集合が存在する」
- $2^{\mathbb{N}}$ の濃度は？
  - $\aleph_0$ よりは真に大きい．では $|2^{\mathbb{N}}| = \aleph$？
  - 全単射 $f : 2^{\mathbb{N}} \to (0, 1)$ が存在する.

集合論におけるパラドクス

ラッセルのパラドクス

- 自分自身を要素として含まない集合を A-集合
- 自分自身を要素として含む集合を B-集合

とよぶ．このとき，A-集合の全体 S は A-集合でも B-集合でもない．

- S が A-集合であるとする．
  - A 集合の定義から $S \notin S$.
  - S の定義から $S \in S$.
- S が B-集合であるとする．
  - B-集合の定義から $S \in S$ （これは S が A-集合の全体の集合であることと矛盾）．

集合論におけるパラドクス

床屋のパラドックス（ラッセルのパラドクスの喩え話）

ある村でたった一人の床屋は，自分で髭を剃らない人全員の髭を剃り，それ以外の人の髭は剃らない．では，床屋自身の髭は誰が剃るのだろうか？

- 床屋が自分の髭を剃らなければ，彼は規則に従って髭を自分で剃らなくてはいけなくなり，矛盾．
- 床屋が自分の髭を剃るならば，「自分で髭を剃らない人の髭を剃る」という規則に矛盾．

集合論におけるパラドクス

カントールのパラドクス

すべての「集合」の集合を Y とする．このとき，Y の冪集合 2^Y は「集合」ではない．

教科書 p.22 を参照．

素朴集合論　公理を特定せずに議論を進める．

公理的集合論　公理を定めて厳密に議論を展開（パラドクスを回避）．

公理的集合論

ZF 公理系

- 外延性の公理：A と B が全く同じ要素を持つのなら A と B は等しい.
- 空集合の公理：要素を持たない集合が存在する.
- 対の公理：任意の集合 x, y に対して，x と y のみを要素とする集合が存在する.
- 和集合の公理：任意の集合 X に対して，X の要素の要素全体からなる集合が存在する.
- 無限公理：空集合を要素とし，任意の要素 x に対して $x \cup \{x\}$ を要素に持つ集合が存在する.
- 冪集合の公理：任意の集合 X に対して X の部分集合全体の集合が存在する.
- 置換公理：”関数クラス”による集合の像は集合である.
- 正則性公理（基礎の公理）；空でない集合は必ず自分自身と交わらない要素を持つ.

公理的集合論

$\boxed{\text{ZFC 公理系}}$ ＝ ZF 公理系＋選択公理

選択公理

X が互いに交わらないような空でない集合 A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の集合であるとする．つまり，

$$X = \{A_\lambda \,|\, A_\lambda \cap A_{\lambda'} = \emptyset \ (\lambda \neq \lambda')\}$$

このとき，X の各要素 A_λ から一つずつ要素をとってきたような集合（選択集合）が存在する

公理的集合論

- 「すべての集合に濃度が定義できる」ためには選択公理が必要.
- ラッセルのパラドクスにある「集合 S」は ZFC 公理系では構成不可能.

- ZF 公理系が無矛盾ならば，ZFC 公理系も無矛盾.

- ZFC 公理系が無矛盾ならば，ZFC に連続体仮説を付け加えた公理系も無矛盾.
- ZFC 公理系が無矛盾ならば，ZFC に連続体仮説の否定を付け加えた公理系も無矛盾.

  （つまり，ZFC 公理系では連続体仮説が真とも偽とも言えない）

参考文献

- 「集合・位相入門」 松坂和夫 著（岩波書店）
- 「岩波数学辞典 第４版」 日本数学会 編集（岩波書店）
- Wikipedia ：集合，濃度，他

（この授業の情報）

- http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2011/mtm.htnl
- http://www.math.sie.dendai.ac.jp/~hiroyasu/2011/mtm.htnl