数学科教育法 レポート⑥の解答

課題 6-1

(1) $f(X)=\{f(x)\,|\,x\in X\}$

(2) $f^{-1}(y)=\{x\,|\,f(x)=y,\ x\in X\}$

課題 6-2

(1) 閉区間 $[-1,1]$

(2) $(0,+\infty)$

(3) $f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2\geq 2$ より，$[2,+\infty)$

課題 6-3

(1) f の値域は $[0,+\infty)$ だから，終域を $[0,+\infty)$ にすると，全射になる．

(2) $f(a)=f(b)$ ならば $b=-a$ であるから，例えば定義域を $[0,\infty)$ に制限すれば，f は単射になる．

課題 6-4

(1) $f:\mathbb{N}\to\{1,3,5,7,\ldots\}$ を $f(n)=2n-1$ と定義すれば，これは全単射である．

(2) $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\cup\{a\}$ を

$$g(n)=\begin{cases} a & (n=1\text{ のとき}) \\ n-1 & (n\geq 2\text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めれば，g は全単射である．

課題 6-5

(1) $\Phi(a+bi)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

(2) $zw=(ac-bd)+(ad+bc)i$．$\Phi(zw)=\begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$

(3) $\Phi(z)\cdot\Phi(w)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$

(2), (3) の結果から，任意の $z,w\in\mathbb{C}$ に対し，$\Phi(zw)=\Phi(z)\cdot\Phi(w)$ が成り立つ．これを写像 Φ は積（群構造）を保つという．

(4) 複素数 $z=a+bi$ の絶対値 $|z|$ とは $\sqrt{a^2+b^2}$ で定まる実数のことである．複素数平面で考えると $|z|$ は原点 0 から z までの距離に等しい．

(5) $\det\Phi(z)=\det\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=a^2+b^2=|z|^2$．つまり，写像 Φ によって $\mathbb{C}$ を $M(2;\mathbb{R})$ の部分集合と考えると，行列式は複素数の絶対値（の 2 乗）と解釈できる．

（**2011.6.1** 担当：佐藤）