数学科教育法 レポート④の解答

課題 4-1

(1) $y=\dfrac{x^2}{4a}$ より，$y'=\dfrac{x}{2a}$，$y''=\dfrac{1}{2a}$．したがって，$x=k$ における曲率半径 $r(k)$ は

$$r(k)=\frac{\left\{1+\left(\frac{k}{2a}\right)^2\right\}^{3/2}}{\left|\frac{1}{2a}\right|}=\underline{2|a|\left\{1+\left(\frac{k}{2a}\right)^2\right\}^{3/2}}.$$

(2) $1+\left(\dfrac{k}{2a}\right)^2\geq 1$ （等号成立は $\underline{k=0\text{ のとき}}$）．さらに「$c\geq 1$ のとき，$p\leq q$ ならば $p^c\leq q^c$」であるから，$\left\{1+\left(\frac{k}{2a}\right)^2\right\}^{3/2}\geq 1^{3/2}=1$．したがって，曲率半径の最小値は $2|a|$ である．接触円の接点は原点であるから，$\underline{\text{接触円の中心は }(0,2a)}$ である．

課題 4-2

<u>ヒント</u>： $y>0$ の範囲の円（円の上半分）は $y=\sqrt{r^2-x^2}$ と表される．この関数について y'，y'' を求め，曲率半径を計算すればよい（円の下半分は $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ として同様に計算）．

また，陰関数のままで微分することもできる．$x^2+y^2=r^2$ の両辺を x で微分すると $2x+2yy'=0$．したがって，$y'=-\dfrac{x}{y}$．また，$2x+2yy'=0$ の両辺を x で微分すると，$2+2(y')^2+2yy''=0$ であるから，$y''=-\dfrac{r^2}{y^3}$．これらを使って曲率半径を計算する．