

課題 3-1 (アポロニウスの円)

$A = (a, 0), B = (-a, 0), P = (x, y)$ とおくと, $AP = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, BP = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$. このとき,

$$\begin{aligned} \frac{AP}{BP} = k (> 0, \text{定数}) &\iff (x-a)^2 + y^2 = k^2 \{(x+a)^2 + y^2\} \\ &\iff (1-k^2)x^2 - 2a(1+k^2)x + (1-k^2)a^2 + (1-k^2)y^2 = 0 \\ &\iff x^2 - \frac{2a(1+k^2)}{1-k^2}x + a^2 + y^2 = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right)^2 - a^2 \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 + a^2 + y^2 = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2k^2}{(1-k^2)^2}. \end{aligned}$$

したがって, 点 P の軌跡は中心が $\left(\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}, 0\right)$, 半径が $\frac{2ak}{|1-k^2|}$ の円である.

課題 3-2 $y = x^3$ 上の点 (a, a^3) の o 時間後の点を $(a + op, a^3 + oq)$ とおくと, これは $y = x^3$ 上の点だから

$$\begin{aligned} a^3 + oq &= (a + op)^3 \iff a^3 + op = a^3 + 3a^2op + 3ao^2p^2 + o^3p^3 \\ &\iff op = 3a^2op + 3ao^2p^2 + o^3p^3 \\ &\iff p = 3a^2p + 3aop^2 + o^2p^3 \\ &\iff \frac{q}{p} = 3a^2 + 3aop + o^2p^2. \end{aligned}$$

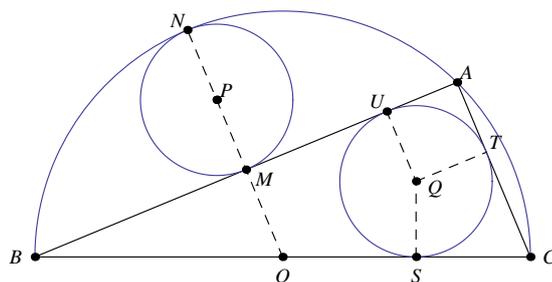
右辺の o は無限に小さい値だから無視する (0 とする) と

$$\frac{q}{p} = 3a^2$$

を得る. これが点 (a, a^3) における接線の傾きである.

課題 3-3

ヒント: (半) 円の中心を O , その円に内接する三角形を $\triangle ABC$ (BC が半円の直径) とする. $\triangle ABC$ に内接する小円の中心を Q , 三角形の各辺との接点を S, T, U とする. 弓形内の最大の小円の中心を P , 半円との接点を N , 線分 AB との接点を M とする.



このとき, 以下のことがわかる (示しなさい);

- (1) 点 M は線分 AB の中点である.
- (2) O, M, P, N は一直線上にある.
- (3) $\triangle ABC$ と $\triangle MBO$ は相似である (相似比は $2:1$).

このような事実から, (i) $OM = R - 2r$ ((2) より), (ii) $AC = 2(R - 2r)$ ((i) と (3) より), (iii) $CT = 2R - 5r$ ((ii) より), (iv) $BS = 5r (= BC - SC = BC - CT)$, (v) $AB = 6r (= BU + UA = BS + UA)$ となる. 三平方の定理 $AB^2 + AC^2 = BC^2$ より $4R = 13r$ が得られる.

補足: 三角形 ABC は辺の長さが整数比 (5 : 12 : 13) を持つ直角三角形となる.