1　2次曲線とは

定義 **1.1.** x, y の 2 次多項式

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c \tag{1}$$

（ただし，$a_{ij}, b_k, c \in \mathbf{R}$ は定数）に対し，集合 $\{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$ を平面 $\mathbf{R}^2$ 内の **2 次曲線** という．

例 **1.2.**　2 次曲線の例：

(i) $y = x^2$　　(ii) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$　　(iii) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

放物線　　楕円　　双曲線

1.3. (1) 式は行列を用いて

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + c,$$

つまり，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$，$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと

$$f(x,y) = {}^t\vec{x}A\vec{x} + {}^t\vec{x}\,\vec{b} + c \tag{2}$$

と表すことができる．座標変換によって (2) 式を簡約化する．

2 次式の行列 A が対称行列（つまり，${}^tA = A$）でありことに注意する．

2 2 次式の簡約化

定理 2.1. 対称行列 A は直交行列で対角化可能である．つまり，任意の n 次対称行列 A に対し，

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{3} $$

を満たす n 次直交行列 P が存在する．

2.2. (2) 式の対称行列 A に対し，

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} $$

となる直交行列 P が存在したとする．この P に対し，$\vec{x} = P\vec{x}'$ と座標変換する．ただし，$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$．このとき，2 次多項式 $f(x,y)$ は

$$ \begin{aligned} & {}^t(P\vec{x}')A(P\vec{x}') + {}^t(P\vec{x}')\,\vec{b} + c \\ =& {}^t\vec{x}'({}^tPAP)\vec{x}' + {}^t\vec{x}'\,({}^tP\vec{b}) + c \\ =& \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + c \\ =& \alpha_1 {x'}^2 + \alpha_2 {y'}^2 + \beta_1 x' + \beta_2 y' + c \end{aligned} $$

となる．ただし，${}^tP\vec{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ とおいた．つまり，2 次方程式 $f(x,y) = 0$ は

$$ \alpha_1 {x'}^2 + \alpha_2 {y'}^2 + \beta_1 x' + \beta_2 y' + c = 0 \tag{4} $$

と簡約化される．

2.3 ($\alpha_1 \neq 0$ かつ $\alpha_2 \neq 0$ の場合)**.** (4) 式を x', y' に関して平方完成する；

$$ \alpha_1 \left(x' + \frac{\beta_1}{2\alpha_1} \right)^2 + \alpha_2 \left(y' + \frac{\beta_2}{2\alpha_2} \right)^2 - \frac{{\beta_1}^2}{4\alpha_1} - \frac{{\beta_2}^2}{4\alpha_2} + c = 0. $$

定数項を右辺に移行して γ とおき，適当な座標の平行移動を適用することにより，

$$ \alpha_1 X^2 + \alpha_2 Y^2 = \gamma \tag{5} $$

とさらに簡約化される．

(i)「$\gamma = 0$」かつ「α_1 と α_2 の符号が同じ」とき，(5) を満たす (X, Y) は $\underline{(0,0)\text{ のみ}}$ である．

(ii)「$\gamma = 0$」かつ「α_1 と α_2 の符号が異なる」とき，(5) は $Y = \pm\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}X$ と式変形できる．つまり，(5) は $\underline{2\text{ つの直線}}$ を表す．

2.4 ($\alpha_1 \neq 0$ かつ $\alpha_2 \neq 0$ の場合の続き)**.** $\gamma \neq 0$ のとき，(5) 式を γ で割ると

$$\frac{\alpha_1}{\gamma}X^2 + \frac{\alpha_2}{\gamma}Y^2 = 1. \tag{6}$$

(iii)「$\dfrac{\alpha_1}{\gamma}, \dfrac{\alpha_2}{\gamma}$ が共に正」のとき，この 2 次曲線は $\underline{\text{楕円}}$ である．

(iv)「$\dfrac{\alpha_1}{\gamma}, \dfrac{\alpha_2}{\gamma}$ の符号が異なる」のとき，この 2 次曲線は $\underline{\text{双曲線}}$ である．

(v)「$\dfrac{\alpha_1}{\gamma}, \dfrac{\alpha_2}{\gamma}$ が共に負」のとき，(6) を満たす (X, Y) は $\underline{\text{存在しない}}$.

2.5 (α_1, α_2 のいずれかが 0 の場合)**.** $\alpha_2 = 0$ とすると，(4) 式は

$$\alpha_1 {x'}^2 + \beta_1 x' + \beta_2 y' + c = 0. \tag{7}$$

(vi)「$\beta_2 \neq 0$」のとき，(7) 式は

$$\alpha_1\left(x' + \frac{\beta_1}{2\alpha_1}\right)^2 + \beta_2\left(y' - \frac{{\beta_1}^2}{4\alpha_1\beta_2} + \frac{c}{\beta_2}\right) = 0$$

と書けるので，適当に座標を平行移動することにより，

$$Y = -\frac{\alpha_1}{\beta_2}X^2$$

となる．したがって，この 2 次曲線は $\underline{\text{放物線}}$ である．

(vii)「$\beta_2 = 0$」のとき，(7) 式は

$$\alpha_1 {x'}^2 + \beta_1 x' + c = 0 \tag{8}$$

となる．この式を満たす (x', y') の集合は (8) の判別式 D の符号によって分類できる．つまり，(vii-1) $D > 0$ のときは $\underline{y'\text{ 軸に平行な 2 直線}}$, (vii-2) $D = 0$ のときは $\underline{y'\text{ 軸に平行な 1 直線}}$, (vii-3) $D < 0$ のとき，(8) を満たす (x', y') は $\underline{\text{存在しない}}$.

3 (3) を満たす直交行列 P の求め方

定理 3.1 (行列の対角化可能性)**.** A を n 次正方行列とする．A の異なる固有値を $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ とし，その重複度を $m_1, m_2, \ldots, m_l$ とする．

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_l = n$$

のとき，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P が存在する．さらに，その対角行列の成分は A の固有値であり，行列 P は A の固有値を並べた行列である．

定理 3.2. α_1, α_2 を対称行列 A の固有値，$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ をそれぞれ α_1, α_2 に関する固有ベクトルとする．このとき，$\alpha_1 \neq \alpha_2$ ならば，$\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ は直交する．

Proof. 仮定から $A\vec{v}_i = k_i\vec{v}_i$.

$$(A\vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 = (k_1\vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 = k_1(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2).$$

一方，

$$(A\vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 = {}^t(A\vec{v}_1)\vec{v}_2 = {}^t\vec{v}_1{}^tA\vec{v}_2 = {}^t\vec{v}_1 A\vec{v}_2 = {}^t\vec{v}_1(A\vec{v}_2) = \vec{v}_1 \cdot (k_2\vec{v}_2) = k_2(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2).$$

上の 2 式から $(k_1 - k_2)(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = 0$．$k_1 \neq k_2$ ならば，$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$，つまり，$\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ は直交する． □

3.3 ((3) を満たす直交行列 P を求める手順)**.**

(1) A の固有値，固有ベクトルを求める．
(2) 固有値 α_i の重複度が 1 のとき，その固有ベクトルを長さが 1 になるに正規化する．
(3) 固有値 α_i の重複度が m のとき，固有値 α_i に関する固有ベクトルで互いに直交する単位ベクトルを m 個選ぶことができる．
(4) 以上のように生成した A の固有ベクトルを n 個並べた行列を P とおく．