一般の平面への透視投影（直交座標）

視点が $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$，投影面が $\pi : ax + by + cz = d$ の透視投影を $\Phi_S : \mathbf{R}^3 \to \pi$ とする．このとき，点 $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ の像 $\Phi_S(A)$ は

$$\Phi_S(A) = \begin{pmatrix} \frac{d(a_1-s_1)+b(s_1a_2-s_2a_1)+c(s_1a_3-s_3a_1)}{a(a_1-s_1)+b(a_2-s_2)+c(a_3-s_3)} \\ \frac{d(a_2-s_2)+a(s_2a_1-s_1a_2)+c(s_2a_3-s_3a_2)}{a(a_1-s_1)+b(a_2-s_2)+c(a_3-s_3)} \\ \frac{d(a_3-s_3)+a(s_3a_1-s_1a_3)+b(s_3a_2-s_2a_3)}{a(a_1-s_1)+b(a_2-s_2)+c(a_3-s_3)} \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

で与えられる．

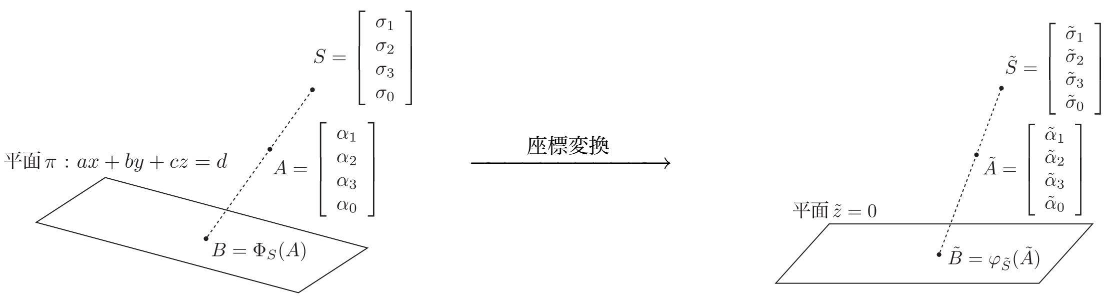
一般の平面への透視投影（同時座標：考え方）

(1) $ax + by + cz = d$ が $\tilde{z} = 0$ となるように座標変換する；

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + \vec{v} \iff \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_0 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & P & & \vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ \tilde{X}_0 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

(2) $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$-座標で平面 $\tilde{z} = 0$ へ透視投影する．

(3) (1) の座標変換の逆変換により xyz-座標に戻す．



一般の平面への透視投影（同時座標：手順）

(1) 視点 S を $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$-座標で表す； $\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_0 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & P & & \vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{\sigma}_3 \\ \tilde{\sigma}_0 \end{bmatrix}$．つまり，

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{\sigma}_3 \\ \tilde{\sigma}_0 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & {}^tP & & -{}^tP\vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_0 \end{bmatrix}.$$

(2) 点 A も同様に $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$-座標で表す．

(3) $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$-座標における平面 $z=0$ への透視投影を表す 4 次正方行列をつくる；

$$\varphi_{\tilde{S}} = \begin{pmatrix} -\tilde{\sigma}_3 & 0 & \tilde{\sigma}_1 & 0 \\ 0 & -\tilde{\sigma}_3 & \tilde{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\sigma}_0 & -\tilde{\sigma}_3 \end{pmatrix}.$$

(4) $\tilde{B} = \varphi_{\tilde{S}}(\tilde{A})$ を求める．

(5) $\tilde{B}$ を逆変換で xyz-座標に戻す．

xyz-座標における点 A の同次座標表示を $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_0 \end{bmatrix}$ とすると，(2)〜(4) の手順は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & P & & \vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} -\tilde{\sigma}_3 & 0 & \tilde{\sigma}_1 & 0 \\ 0 & -\tilde{\sigma}_3 & \tilde{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\sigma}_0 & -\tilde{\sigma}_3 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} & {}^tP & & -{}^tP\vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

を計算していることに他ならない．

問題 6.3. 視点が $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$，投影面が方程式 $3x+2y+2z=-1$ で与えられる平面の透視投影を Φ_S とする．問題 6.2 の 6 個の点 A, B, C, D, E, F を Φ_S で移した像の座標を求めなさい．