

情報数学 III 第 5 回小テストレポート課題についてのコメント

1

- 直交行列 とは, 「 ${}^tAA = A{}^tA = E_n$ 」を満たす行列のこと. この条件は「 $A^{-1} = {}^tA$ 」または「任意のベクトル \vec{v}, \vec{u} に対して, $(A\vec{v}) \cdot (A\vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$ 」と同値である.
- 直交変換 とは, 「直交行列で定義される線形変換」のこと. または, 「内積を保つ線形変換」.

2 行列 A が直交行列かどうか調べるには, (i) ${}^tA \cdot A = E_n$ が成り立つこと確かめるか, (ii) A の成分の列ベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots$ に対して, 内積 $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j$ の値が 1 ($i = j$) または 0 ($i \neq j$) となることを確かめる 2 つの方法があります.

各行列に対して上の 2 つのどちらかを適用し, 「どのような場合 (k の条件) に限り直交行列になるか」を答えればよい.

(4) は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos k & \sin k \\ \sin k & \cos k \end{pmatrix} {}^t \begin{pmatrix} \cos k & \sin k \\ \sin k & \cos k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos k & \sin k \\ \sin k & \cos k \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 k + \sin^2 k & 2 \sin k \cos k \\ 2 \sin k \cos k & \cos^2 k + \sin^2 k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \sin(2k) \\ \sin(2k) & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから, これが単位行列となるのは $\sin(2k) = 0$ となるときに限る. したがって, $2k = n\pi$, つまり $k = \frac{\pi}{2}n$ の場合に限る (ただし, n は整数).

3 次の各問に答えなさい.

- (1) x, y, z を $x - k, y - (-k), z - 3k$ にそれぞれ置き換えればよいので, $(x - k) - (y - (-k)) + 3(z - 3k) = 2$. これを展開すると, $x - y + 3z = 2 + 11k$.
- (2) 方程式 $x^2 - 3y^2 + z^2 + 4x + 2y + 2z = 3$ は $(x - (-2))^2 - 3(y - \frac{1}{3})^2 + (z - (-1))^2 = \frac{23}{3}$ と式変形できる.