# 情報数学 III 第 2 回小テストレポート課題についてのコメント

$\boxed{\mathbf{1}}$ 問題は「与えられた 2 変数 $t, s$ に関する 3 つの方程式の連立方程式の解が存在するか」を調べることである．たいていの場合，2 つの方程式から $t, s$ が求めるが，それが残りの一つの方程式を満たすかが問題である．

(1) のは解が存在せず，(2) は解が存在する（$t = -1,\ s = 0$）．

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) 与えられた 3 点 $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ に対し，$(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{c})$，$(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{b}-\vec{c})$，$(\vec{c}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{b})$ はいずれも，この 3 点を通る平面の法線ベクトルを与える（ちなみに，これらが零ベクトルになるのは，3 点が一直線上に並ぶときである．この場合，3 点を通る平面は一つに決まらない）．

(2) 点 $\vec{a}$ を通り，法線ベクトルが $\vec{n}$ の平面上の点を $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおいて，平面の方程式 $\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a}) = 0$ を展開すると，$x, y, z$ の係数が法線ベクトルの成分に等しいことがわかる．したがって，方程式 $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ が表す平面の法線ベクトルは $\vec{n} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$（の定数倍）に等しい．

（別解）方程式 $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ において $y = t$，$z = s$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\alpha}t - \frac{\gamma}{\alpha}s + \frac{\delta}{\alpha} \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\alpha} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり，これは平面 $\pi$ の媒介変数表示を与える．法線ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\alpha} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\beta}{\alpha} \\ \frac{\gamma}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

これを $\alpha$ 倍すれば，上のベクトル $\vec{n}$ に等しいことがわかる（以上の議論は $\alpha \neq 0$ の場合）．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $x^2 + y^2 + z^2$ に

$$x = r\cos t\,\cos s, \quad y = r\sin t\,\cos s, \quad z = r\sin s \qquad (*)$$

を代入して $r^2$ に等しいことを確かめればよい．

**2011.10.17**（担当：佐藤）