情報数学 III 中間試験 解答

$\boxed{1}$

(1) ベクトルのなす角と内積：$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$.
$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ であるから，なす角は $\theta=\frac{\pi}{2}$（つまり，直交する）．したがって，$\vec{v}$ との内積が 0 となるベクトルを選べばよい．
<u>（イ）と（ウ）</u>

(2) 原点を中心とする回転変換：$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
（ア）回転角 $\theta=-\frac{\pi}{2}$　（イ）鏡映変換　（エ）回転角 $\theta=\frac{\pi}{6}$
<u>（ア）と（エ）</u>

(3) 行列 A の固有ベクトルとは $A\vec{v}=k\vec{v}$ を満たすベクトル．$A\vec{v}$ を計算し，$\vec{v}$ と比較し，定数倍の違いしかないものを選べばよい．
<u>（ウ）</u>

(4) 行列式は固有値の（重複度込みの）積となる．したがって，行列式が 0 となる行列を選べばよい（固有多項式を計算し，固有値を求めてもよい）．
<u>（イ）</u>

$\boxed{2}$

(1) 空間ベクトルの外積の計算．$\vec{v}_1\times\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) 平面の媒介変数表示：$\vec{p}=\vec{a}+t\,\vec{v}_1+s\,\vec{v}_2$；

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t-s \\ -2+2s \\ 1+t+s \end{pmatrix} \qquad (t,\ s \text{ は任意の実数})$$

(3) 平面のベクトル方程式：$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$（法線ベクトルは，この場合 $\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2$）；

$$x+y-z=-2$$

(4) 線形変換による図形の変換の問題．
線形変換の性質から，平面 π 上の点 $\vec{p}$ は $A\vec{p}=A\vec{a}+t\,A\vec{v}_1+s\,A\vec{v}_2$ へ移る．しかし，$A\vec{v}_2=\vec{0}$ であるので，π の像は

$$A\vec{a}+t\,A\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4+2t \\ -8-2t \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は任意の実数})$$

である．これは <u>直線</u> である．

- $A\vec{v}_2=\vec{0}$ であることを計算していて，かつ「直線に変換される」ことを述べて **3** 点.
- 「直線」という記述はないが，$A\vec{a}+t\,A\vec{v}_1$ が正しく計算できていれば **2** 点.

情報数学 III 中間試験 解答

$\boxed{\mathbf{3}}$ 固有値・固有ベクトルを求める問題．定義にしたがって計算すればよい．

(a) 固有多項式は $\Phi(t) = (t-1)(t+2)$．したがって，固有値は $\underline{1,\ -2}$．（**3** 点）

1 に関する固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$-2$ に関する固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ （c は 0 以外の任意の実数[*1]）．（それぞれ **2** 点）

(b) 固有多項式は $\Phi(t) = (t-1)(t-2)^2$．したがって，固有値は $\underline{1,\ 2}$．（**6** 点

1 に関する固有ベクトルは $c_0\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$，2 に関する固有ベクトルは $c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

（c_i は 0 以外の任意の実数）（それぞれ **4** 点）．

---

*1 任意定数の記述がない場合は不正解にすると，11 月 2 日の授業で説明しました．