情報数学 III 期末試験 解答

**1**

2 次方程式

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \circledast$$

に対して，以下の問に答えなさい．（各 **5** 点）

(1) ⊛式を行列とベクトルを用いて $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ と表すときの行列 $A$ を答えなさい．

(2) 行列 $A$ の固有値を求めなさい．

(3) ⊛式が表す 2 次曲面がどのような図形（放物線，楕円，双曲線）か答えなさい．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

(2) $\Phi_A(t) = \det(tE_2 - A) = (t+2)(t-2)$ より，$A$ の固有値は $\pm\mathbf{2}$.

(3) (2) の結果から，問題の 2 次方程式が $2\tilde{x}^2 - 2\tilde{y}^2 = 1$ となるように座標変換できる．したがって，この 2 次曲線は**双曲線**（説明が何もない場合は 2 点の減点．説明に不備がある場合は 1 点の減点）．

**2**

$S = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ を視点とし，平面 $z = 0$ を投影面とする透視投影を $\varphi_S$ とする．以下の問に答えなさい．

(1) 同次座標系において $\varphi_S$ は行列の積で表すことができる．その 4 次正方行列 を答えなさい．（**3** 点）

(2) 4 点 $A = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ の $\varphi_S$ による像 $\varphi_S(A)$, $\varphi_S(B)$, $\varphi_S(C)$, $\varphi_S(D)$ を求め，直交座標で答えなさい．（各 **2** 点）

(3) 4 点 $A, B, C, D$ を頂点とする四面体の $\varphi_S$ による像のワイヤーフレームとして正しいものを（ア）〜（ウ）の中から選びなさい（ただしグラフの 1 目盛りは 0.5)．（**4** 点）

(1) この行列は一意には決まらない．$S$ の同時座標の決め方に依る．$S$ の同次座標を $\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$



実施日：**2012.1.11** 担当：佐藤

とすると，$\varphi_S = \begin{pmatrix} -10 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}$.

(2) $\varphi_S(A) = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{13}{8} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_S(B) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_S(C) = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\varphi_S(D) = \begin{pmatrix} \frac{47}{13} \\ -\frac{12}{13} \\ 0 \end{pmatrix}$ (同次座標のままの場合はそれぞれ 1 点の減点)

(3) （ウ）

**3**

平行投影を定義するには定ベクトル $\vec{v}$ と投影面 $\pi$ が必要です．ただし，$\boldsymbol{\vec{v}}$ は $\boldsymbol{\pi}$ の法線ベクトルと直交しないと仮定します．なぜなら，$\vec{v}$ が $\pi$ の法線ベクトルと直交する場合，$\pi$ 上にない任意の点 $A$ に対し，点 $A$ を通り，方向ベクトルが $v$ の直線は $\pi$ と交わらない からです．一方，透視投影を定義するには視点 $S$ と投影面 $\pi$ が必要です．透視投影の場合，一般に始点 $\boldsymbol{S}$ は投影面 $\boldsymbol{\pi}$ 上の点でないことを仮定します．
以上のことをふまえ，次の問に答えなさい．(各 **5** 点)

(1) $\pi$ 上の点 $S$ を視点とする透視投影 $\varphi_S : \mathbf{R}^3 \to \pi$ はどのような写像か答えなさい．

(2) 視点 $S$ が投影面 $\pi$ 上の点でない場合でも，透視投影のよる像 $\varphi_S(A)$ が定義できない点 $A$ が存在します．この点 $A$ はどのような点か説明しなさい．

(1) 透視投影 $\varphi_S : \mathbf{R}^3 \to \pi$ とは，点 $A$ に対し，$A$ と $S$ を通る直線と投影面 $\pi$ との交点 $B$ を対応させる写像 である．視点 $S$ が $\pi$ 上にあるとき，任意の点 $A$ と $S$ を通る直線は必ず点 $S$ で $\pi$ と交わる（ただし，$A$ が $\pi$ 上の点でないとき）．つまり，$\pi$ 上の点ではない任意の点の $\varphi_S$ による像は一点 $S$ である．一方，$A$ が $\pi$ 上の点のときは $S$ と $A$ を通る直線は $\pi$ 内の直線となるので，$\varphi_S$ による $A$ の像を決めることができない．つまり，$\boldsymbol{\varphi_S}$ は (i) $\boldsymbol{\pi}$ 上にない任意の点 $\boldsymbol{A}$ に対し，$\boldsymbol{\varphi_S(A) = S}$ となる写像で，(ii) $\boldsymbol{\pi}$ 上の点 $B$ に対しては $\boldsymbol{\varphi_S(B)}$ は定義できない ((i) か (ii) のどちらか一方を書いていれば 5 点)．

(2) 点 $A$ と視点 $S$ の 2 点を通る直線が投影面 $\pi$ の法線ベクトルと直交するとき，この直線は $\pi$ と交わることはないので，$\varphi_S(A)$ を定義することはできない．したがって，点 $\boldsymbol{A}$ は，$\boldsymbol{S}$ を通り $\boldsymbol{\pi}$ に平行な平面上の点である（「点 $A$ が視点 $S$ のとき」は 2 点，「点 $A$ と視点 $S$ を通る直線が投影面と交わらないような点」は 3 点（このような状況になる点 $A$ の説明を求めているので 2 点の減点），言葉による説明は不十分だが図で正しく説明されている場合は 4 点）．