問題 1. 直交行列 P とベクトル $\vec{v}$ を用いて xyz-座標系を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \vec{v} \qquad (\vec{x} = P\vec{X} + \vec{v}) \tag{1}$$

と XYZ-座標系に座標変換し，平面 $ax + by + cz = d$ が平面 $Z = 0$ となるようにしたい．<u>P と $\vec{v}$ をどう定めればよいか？</u>

2 (平面の方程式のベクトル表示)**.** $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおくと，平面の方程式 $ax + by + cz = d$ は

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = d \tag{2}$$

と書くことができる（「$\cdot$」はベクトルの内積）．一方，行列の積を用いると

$${}^t\vec{x}\,\vec{n} = d \tag{3}$$

となる．(3) に (1) を代入し，簡単な式変形すると

$${}^tX\,({}^tP\vec{n}) = d - {}^tv\,\vec{n} \tag{4}$$

となる．

3 (ベクトル $\vec{v}$ について)**.** (4) の左辺が X, Y, Z に関する 1 次の項で，右辺が定数項であることに注意すると，これが $Z = 0$ となるためには，$\vec{v}$ は

$$d - {}^tv\,\vec{n} = 0 \tag{5}$$

を満たさなければならない．

4 (直交行列 P について)**.** 同様に直交行列 P は

$${}^tP\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \tag{6}$$

とならなければならない（k は 0 でない実数）．ここで $P = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \end{pmatrix}$ と列ベクトルで表記すると，

$${}^tP\vec{n} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1 \\ {}^t\vec{p}_2 \\ {}^t\vec{p}_3 \end{pmatrix} \vec{n} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1\,\vec{n} \\ {}^t\vec{p}_2\,\vec{n} \\ {}^t\vec{p}_3\,\vec{n} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

(6)(7) より，$\vec{p_i}$ は

$$ {}^t\vec{p_1}\,\vec{n} = 0, \quad {}^t\vec{p_2}\,\vec{n} = 0, \quad {}^t\vec{p_3}\,\vec{n} = k \tag{8} $$

を満たすベクトルである（内積を用いて表すと $\vec{p_1}\cdot\vec{n} = \vec{p_2}\cdot\vec{n} = 0$, $\vec{p_3}\cdot\vec{n} = k$）．$\vec{p_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ が直交行列の列ベクトルであることに注意すると，「$\vec{p_3}$ は $\vec{n}$ を長さ 1 に正規化したベクトルで，$\vec{p_1}, \vec{p_2}$ はそれらに直交するベクトル」である．これらを求めるひとつの手順は

(1) $\vec{p_3} = \dfrac{1}{|\vec{n}|}\vec{n}$ とする．

(2) $\vec{p_3}$ に直交する単位ベクトル $\vec{p_2}$ を適当に定める．

(3) $\vec{p_1} = \vec{p_2} \times \vec{p_3}$ とする．