東京電機大学 情報環境学部

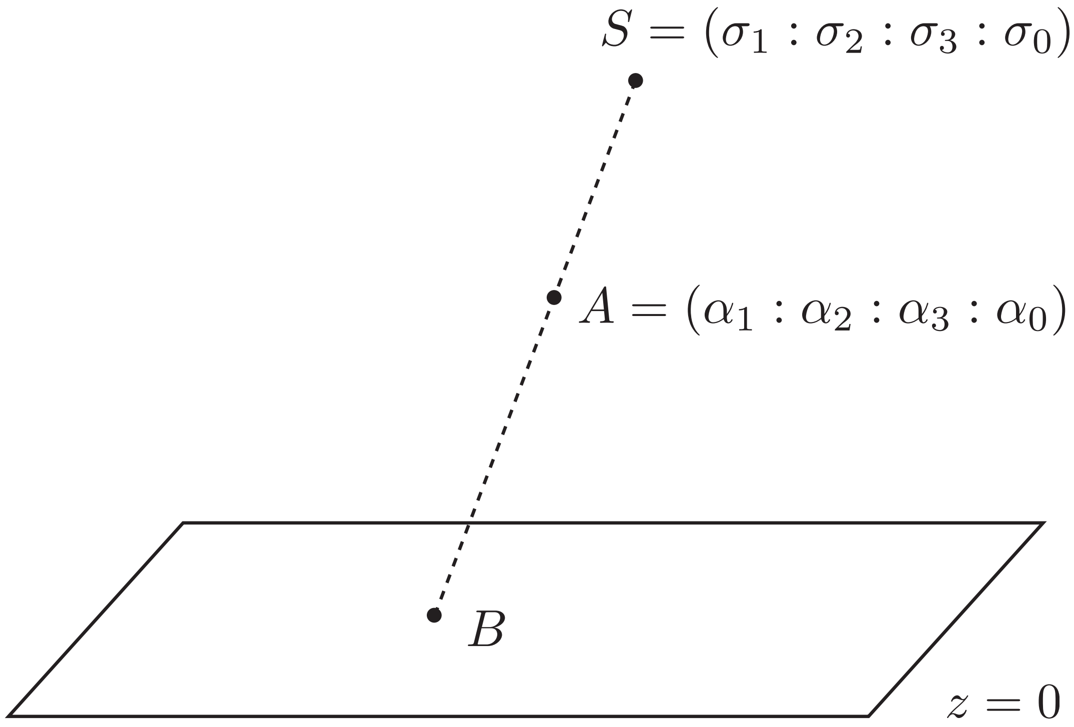
情報数学 III「一般の平面への透視投影」

平成 23 年 12 月 21 日（水）

担当：佐藤 弘康

復習：平面 $z = 0$ への透視投影（同次座標系）

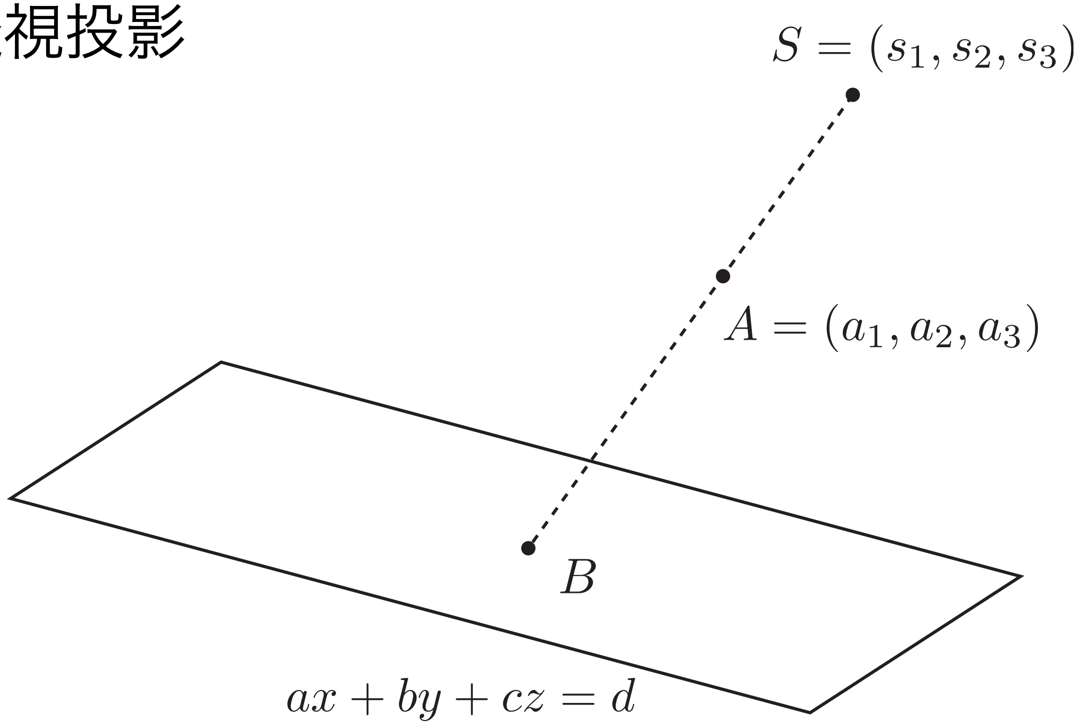
視点を $S = (\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_0)$ とする透視投影



点 A の投影像 B の座標は
$$\begin{pmatrix} -\sigma_3 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

平面 $ax + by + cz = d$ への透視投影（直交座標系）

視点を $S = (s_1, s_2, s_3)$ とする透視投影

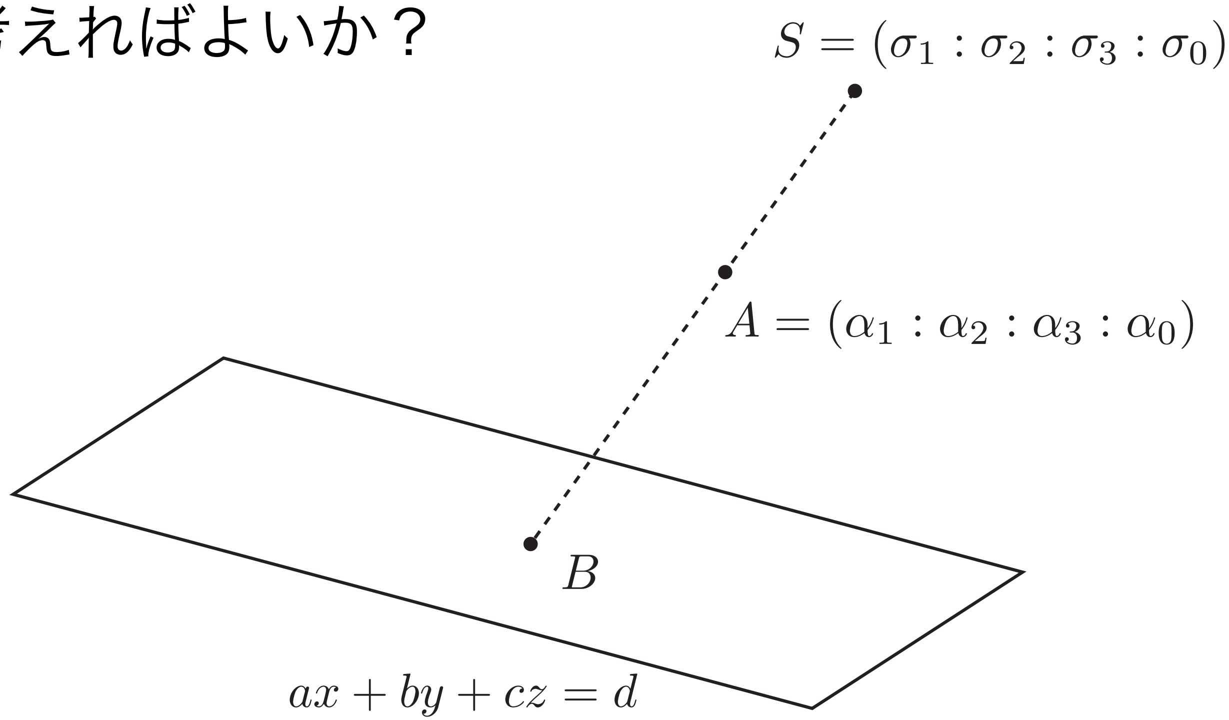


点 A の投影像 B の座標は

$$\frac{1}{a(a_1 - s_1) + b(a_2 - s_2) + c(a_3 - s_3)} \begin{pmatrix} (a_1 - s_1)d + (s_1 a_2 - s_2 a_1)b + (s_1 a_3 - s_3 a_1)c \\ (a_2 - s_2)d + (s_2 a_1 - s_1 a_2)a + (s_2 a_3 - s_3 a_2)c \\ (a_3 - s_3)d + (s_3 a_1 - s_1 a_3)a + (s_3 a_2 - s_2 a_3)b \end{pmatrix}$$

平面 $ax+by+cz=d$ への透視投影（同次座標系）

同次座標系では，どのように考えればよいか？



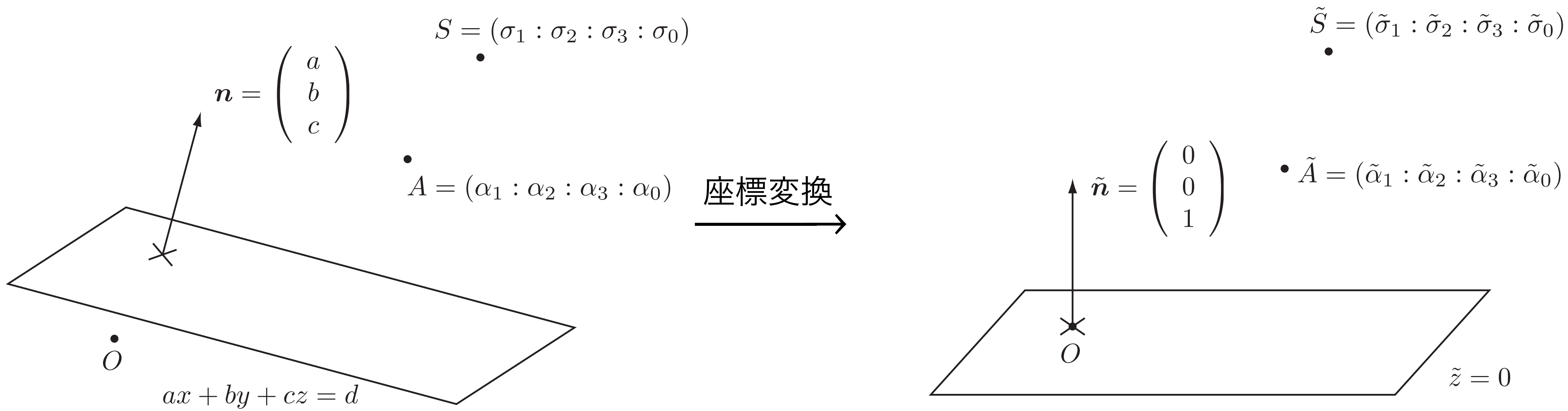
座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \iff \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_0 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc:c} & & & v_1 \\ & P & & v_2 \\ & & & v_3 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ \tilde{X}_0 \end{bmatrix}$$

一般の平面への透視投影（同次座標系）

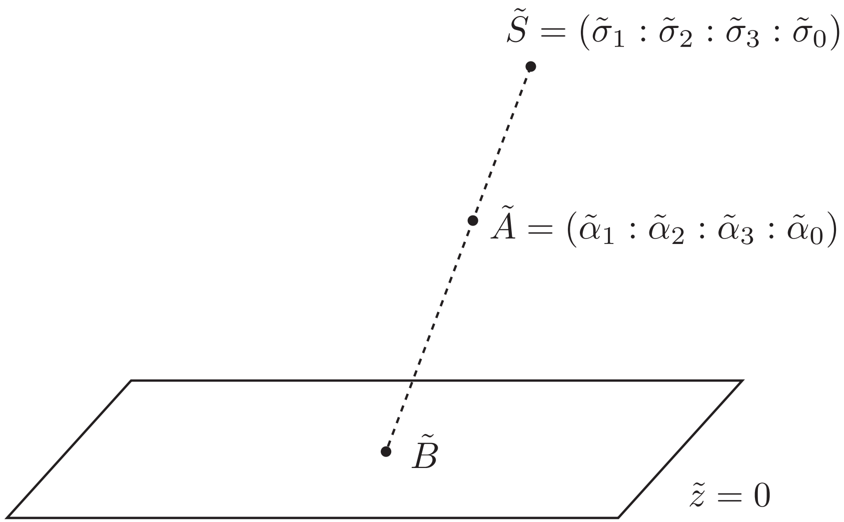
$\boxed{\text{手順 1}}$　平面 $ax+by+cz=d$ が平面 $\tilde{z}=0$ になるよう座標変換する；

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \iff \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_0 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & v_1 \\ & P & & v_2 \\ & & & v_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ \tilde{X}_0 \end{bmatrix}$$



一般の平面への透視投影（同次座標系）

$\boxed{\text{手順 2}}$ $\tilde{z}=0$ 平面への投影像 $\tilde{B}$ を求める.



$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} -\tilde{\sigma}_3 & 0 & \tilde{\sigma}_1 & 0 \\ 0 & -\tilde{\sigma}_3 & \tilde{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\sigma}_0 & -\tilde{\sigma}_3 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \tilde{\alpha}_3 \\ \tilde{\alpha}_0 \end{bmatrix}$$

ただし,

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_0 \end{bmatrix}=M\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{\sigma}_3 \\ \tilde{\sigma}_0 \end{bmatrix},\quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}=M\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \tilde{\alpha}_3 \\ \tilde{\alpha}_0 \end{bmatrix},\qquad M=\left(\begin{array}{ccc:c} & & & v_1 \\ & P & & v_2 \\ & & & v_3 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

一般の平面への透視投影（同次座標系）

$\boxed{\text{手順 3}}$ 逆の手順で座標変換して，投影像 B を求める

$$B = M\tilde{B} = M \begin{pmatrix} -\tilde{\sigma}_3 & 0 & \tilde{\sigma}_1 & 0 \\ 0 & -\tilde{\sigma}_3 & \tilde{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\sigma}_0 & -\tilde{\sigma}_3 \end{pmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$