東京電機大学 情報環境学部

情報数学 III「2 次曲面の分類について」（対称行列の対角化）

平成 23 年 12 月 5 日（月）

担当：佐藤 弘康

2 次曲面の分類

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

$\Downarrow$ • **行列・ベクトル表示：**$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$${}^t\vec{x}A\vec{x} + {}^t\vec{x}\,\vec{b} + c = 0$$

$\Downarrow$ • $\vec{x} = P\vec{x'}$ **と直交行列** P **で座標変換** s.t. ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$

$$\alpha_1(x')^2 + \alpha_2(y')^2 + \alpha_3(z')^2 + \beta_1x' + \beta_2y' + \beta_3z' + c = 0$$

$\Downarrow$ • **適当に座標を平行移動（平方完成）**

$\vdots$

直交行列 P の求め方（A が 2 次対称行列の場合：復習）

A の異なる固有値が２つ α_1, α_2 のとき：各固有値の重複度は 1.

(1) 固有値 α_1, α_2 を求める.

(2) 固有値 α_i に関する固有ベクトル $\vec{v}_i$ を求める（$i = 1, 2$）.

(3) 固有ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ を長さが 1 になるように正規化する；

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1,\ \vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{v}_2|}\vec{v}_2.$$

(4) $P = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{pmatrix}$ とすればよい.

A の異なる固有値が α ひとつのとき：固有値 α の重複度は 2.

- これは $A = \alpha E_2$ となることと同値（すでに対角行列）.

直交行列 P の求め方（A が 3 次対称行列の場合）

A の異なる固有値が３つ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ のとき：各固有値の重複度は 1.

(1) 固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を求める.

(2) 固有値 α_i に関する固有ベクトル $\vec{v}_i$ を求める（$i = 1, 2, 3$）.

(3) 固有ベクトル $\vec{v}_i$ を長さが 1 になるように正規化する；

$\vec{u}_i = \dfrac{1}{|\vec{v}_i|}\vec{v}_i \ (i = 1, 2, 3)$.

(4) $P = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix}$ とすればよい.

A の異なる固有値が α ひとつのとき：固有値 α の重複度は 3.

- これは $A = \alpha E_3$ となることと同値（すでに対角行列）.

直交行列 P の求め方（A が 3 次対称行列の場合）

A の異なる固有値が２つ α, α_0 のとき：固有値の重複度は 1 と 2.

(1) 固有値 α, α_0 を求める（重複度がそれぞれ $1, 2$ とする）.

(2) 固有値 α に関する固有ベクトル $\vec{v}$ を求める.

(3) 固有値 α_0 に関する固有ベクトルを求める．重複度が 2 なので，固有ベクトルは $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$ と書ける（c_1, c_2 は任意の実数）.
（$\vec{v}\cdot\vec{v}_1 = \vec{v}\cdot\vec{v}_2 = 0$ だが，$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 \neq 0$ であることに注意する）

(4) $\vec{v}_3 = \vec{v}\times\vec{v}_1$ とする.

(5) ベクトル $\vec{v},\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_3$ を長さが 1 になるように正規化する；
$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v},\ \vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1,\ \vec{u}_3 = \frac{1}{|\vec{v}_3|}\vec{v}_3.$$

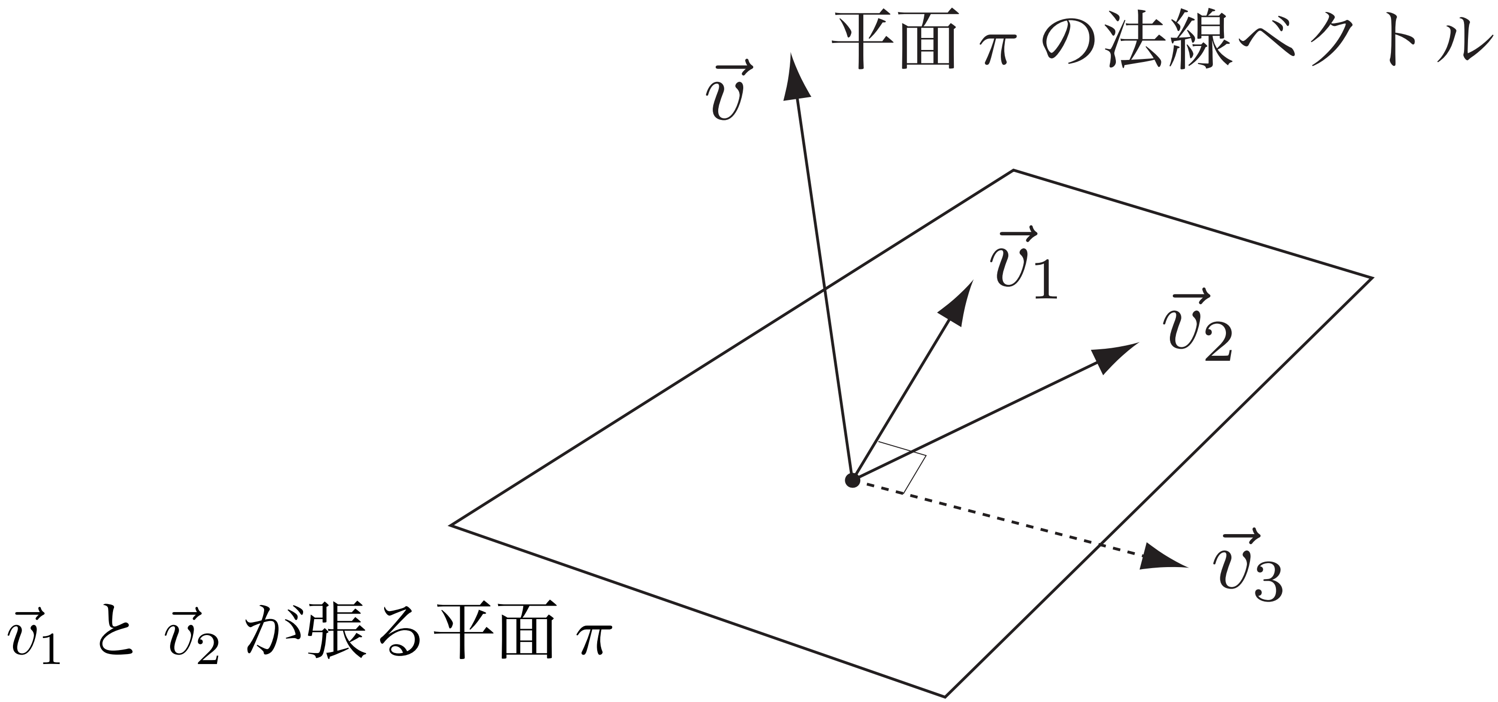
(6) $P = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{u}_1 & \vec{u}_3 \end{pmatrix}$ とすればよい.

直交行列 P の求め方（A が 3 次対称行列の場合）

目標　以下の性質を満たす３つのベクトルを見つけること；

- すべて行列 A の固有ベクトルである.
- それらは単位ベクトルで，互いに直交する.

3 次対称行列 A の固有値の重複度が 1 と 2 のときは . . .



n 次対称行列の直交行列による対角化

以下の概念を理解する必要がある.

- 一般ベクトル空間とその部分空間
- ベクトル空間の基底と次元
- 内積空間と正規直交基底
- 固有空間
- グラム・シュミットの直交化