東京電機大学 情報環境学部

情報数学 III「2 次曲線の分類について」（対称行列の対角化）

平成 23 年 11 月 30 日（水）

担当：佐藤 弘康

2 次曲線の分類

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1 x + b_2 y + c = 0$$

- $\vec{x} = P\vec{x'}$ と直交行列 P で座標変換.

$\Downarrow$ ただし, ${}^tP \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$. $\boxed{P\text{ をどう求めるか？}}$

$$\alpha_1(x')^2 + \alpha_2(y')^2 + \beta_1 x' + \beta_2 y' + c = 0$$

$\Downarrow$
- 適当に座標を平行移動（平方完成）

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1}{\gamma}X^2 + \dfrac{\alpha_2}{\gamma}Y^2 = 1 & \text{（楕円，双曲線）} \\ \alpha_1 X^2 + \beta_2 Y = 0 & \text{（放物線）} \\ \vdots & \text{(1 点, 交わる 2 直線, 平行な 2 直線, 1 直線, ...)} \end{cases}$$

行列の対角化（一般の場合）

定理（行列の対角化可能性）

A を n 次正方行列とする．A の相異なる固有値を $k_1, k_2, \ldots, k_l$，その重複度をそれぞれ $m_1, m_2, \ldots, m_l$ とする．このとき，

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_l = n$$

ならば，A は対角化可能である．つまり，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような n 次正則行列 P が存在する．

- P は固有ベクトルを並べてできる行列．
- 対角行列の対角成分は固有値を重複度込みで並べたもの．

行列の対角化（対称行列の場合）

定理（対称行列の対角化）

任意の対称行列 A は対角化可能である．つまり，任意の n 次対称行列 A に対し，

$$
{}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}
$$

を満たす n 次直交行列 P が存在する．

定理（対称行列の固有ベクトル）

α_1, α_2 を対称行列 A の固有値，$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ をそれぞれ α_1, α_2 に関する固有ベクトルとする．このとき，$\alpha_1 \neq \alpha_2$ ならば，$\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ は直交する．

直交行列 P の求め方（A が **2** 次対称行列の場合）

A の固有値 α_1, α_2 が異なるとき：各固有値の重複度は 1.

(1) 固有値 α_1, α_2 を求める.

(2) 固有値 α_i に関する固有ベクトル $\vec{v}_i$ を求める（$i = 1, 2$）.

(3) 固有ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ を長さが 1 になるように正規化する；

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1,\ \vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{v}_2|}\vec{v}_2.$$

(4) $P = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{pmatrix}$ とすればよい.

A の異なる固有値が α ひとつのとき：固有値 α の重複度は 2.

- これは $A = \alpha E_2$ となることと同値（すでに対角行列）.

問題

次の 2 次曲線が楕円，双曲線，放物線のどれか答えなさい．

(1) $3x^2 - 12xy - 6y^2 - 6x - 12y + 13 = 0$

(2) $x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$

(3) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 5x - 10y + 5 = 0$