東京電機大学 情報環境学部

情報数学 III「固有値の重複度」

平成 23 年 10 月 31 日（月）

担当：佐藤 弘康

前回の例題

問題

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 9 & -5 & 3 \\ -9 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$ の固有値・固有ベクトルを求めなさい.

- 固有多項式 $\Phi_A(t) = \det(tE_3 - A) = (t+2)^2(t-1)$.
- したがって，固有値は -2 と 1.

前回の例題（固有ベクトルの計算）

- 固有値 1 について

$$1 \cdot E_3 - A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -3 \\ -9 & 6 & -3 \\ 9 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

連立方程式

$$\begin{cases} x \qquad + z = 0 \\ \qquad y + z = 0 \end{cases}$$

の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$: 固有ベクトル（t は任意の実数）

前回の例題（固有ベクトルの計算）

- 固有値 (−2) について

$$(-2)\cdot E_3 - A = \begin{pmatrix} -9 & 3 & -3 \\ -9 & 3 & -3 \\ 9 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（連立）方程式

$$3x - y + z = 0$$

の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

: 固有ベクトル（t, s は任意の実数）

固有ベクトルの選び方の自由度

- 固有値 1 に関する固有ベクトルは, $t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  $\Longrightarrow$ 固有ベクトルの全体は直線をなす（媒介変数 t）.

- 固有値 (–2) に関する固有ベクトルは, $t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

  $\Longrightarrow$ 固有ベクトルの全体は平面をなす（媒介変数 t, s）.

固有値の選び方の自由度を「重複度」という概念で定義する.

固有値の重複度の定義

定義（固有値の重複度）

A を n 次正方行列とする．A の固有値 k の重複度を

$$n - \mathrm{rank}(kE_n - A)$$

と定義する．

行列の対角化

定理（行列の対角化可能性）

A を n 次正方行列とする．A の相異なる固有値を $k_1, k_2, \ldots, k_l$，その重複度をそれぞれ $m_1, m_2, \ldots, m_l$ とする．このとき，

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_l = n$$

ならば，A は対角化可能である．つまり，

$$P^{-1} A P$$

が対角行列となるような n 次正則行列 P が存在する．

- P は固有ベクトルを並べてできる行列．
- 対角行列の対角成分は固有値を重複度込みで並べたもの．

固有値と行列式

系

A を n 次正方行列とする．A の相異なる固有値を $k_1, k_2, \ldots, k_l$，その重複度をそれぞれ $m_1, m_2, \ldots, m_l$ とする．このとき，

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_l = n$$

ならば，

$$\det(A) = k_1^{m_1} \times k_2^{m_2} \times \cdots \times k_l^{m_l}.$$