東京電機大学 情報環境学部

情報数学 III「空間の線形変換」

補助教材：*Mathematica* ノートブック

`im3-2-lintransR3.nb`

平成 23 年 10 月 21 日（金）

担当：佐藤 弘康

Mathematica におけるグラフィックス表現

プロットコマンド

- 陽関数表示

  Plot3D[f(x,y), {x, x_{min}, x_{max}}, {y, y_{min}, y_{max}}]

- 媒介変数表示

  ParametricPlot3D[{x(t,s), y(t,s), z(t,s)}, {t, t_{min}, t_{max}}, {s, s_{min}, s_{max}}]

- 陰関数表示

  ContourPlot3D[f(x,y,z)==0, {x, x_{min}, x_{max}}, {y, y_{min}, y_{max}}, {z, z_{min}, z_{max}}]

Mathematica におけるグラフィックス表現

グラフィックスプリミティブ

- 点を打つ：`Point`[{x,y,z}]
- 点を線分で結ぶ（終点を矢印にする場合は `Arrow`）：

  `Line`[{{x_1,y_1,z_1},{x_2,y_2,z_2},...}]
- 与えられた点を頂点とする多角形：

  `Polygon`[{{x_1,y_1,z_1},{x_2,y_2,z_2},...}]
- 対角座標で決まる直方体

  `Cuboid`[{{x_{min},y_{min},z_{min}},{x_{max},y_{max},z_{max}}}]
- 球面：`Sphere`[r, {x,y,z}]
- テキストを配置する：`Text`[文字列, x,y,z]
-

Mathematica におけるグラフィックス表現

- グラフィックスプリミティブを描画するには,

  `Graphics3D`[*graphicsprimitive*]

- 複数個の場合は {} で囲んでコンマで区切る；

  Graphics3D[{*graphicsprimitive*$_1$, *graphicsprimitive*$_2$, ...}]

- プロットコマンドで描画するものも合わせて，複数個のグラフィックスを表示するためには,

```
Show[{
  Plot3D[...],
  Graphics3D[...],
       ⋮
}]
```

Mathematica におけるグラフィックス表現

- プロットコマンド，グラフィックスプリミティブともに各種オプションあり．
  - 描画範囲，グラフィックスの比率など
  - 座標軸，ボックスを描くか，否か
  - 色，太さ，透明度など
- 詳細は *Mathematica* のメニュー「ヘルプ」→「ドキュメントセンター」で検索せよ．

拡大・縮小

拡大・縮小

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}.$$

- $|k_1| > 1$（または $0 < |k_1| < 1$）のとき，x 軸方向に拡大（縮小）.
- $|k_2| > 1$（または $0 < |k_2| < 1$）のとき，y 軸方向に拡大（縮小）.
- $|k_3| > 1$（または $0 < |k_3| < 1$）のとき，z 軸方向に拡大（縮小）.

せん断

せん断

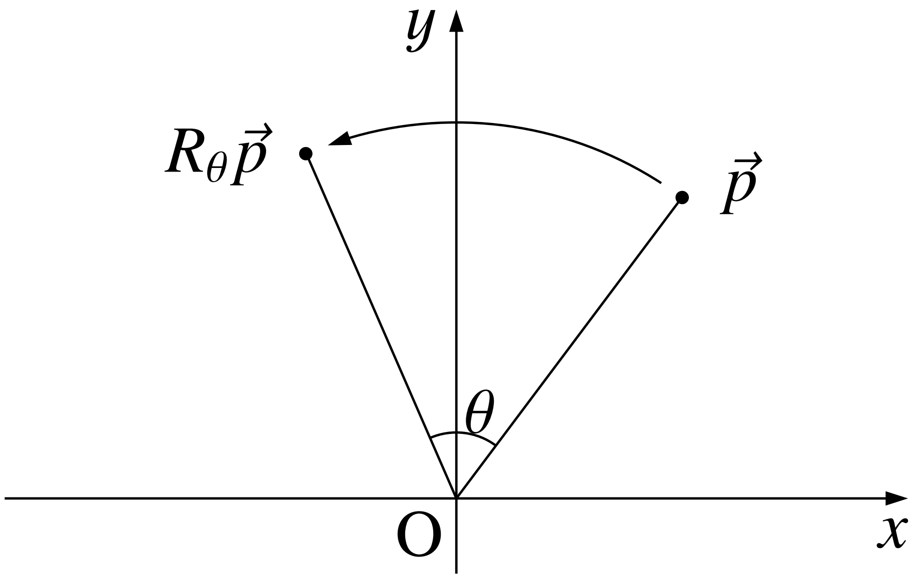
$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

回転：復習（平面内の回転変換）

原点を中心とする平面 θ-回転

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$



- 平面における回転変換は点があれば定義できる.
- しかし，空間内の回転は直線（回転軸）がないと定義できない.

回転 (1)

$\boxed{z\text{ 軸を回転軸とする }\theta\text{-回転}}$ $$R_{z(\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $R_{z(\theta)}$ は $\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{R_θ}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ とブロック分割できる.
- つまり，$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して $R_{z(\theta)}$ が定める線形変換は，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ には θ-回転として作用し，z-成分は不変にする.

回転 (2)

x 軸を回転軸とする θ-回転

$$R_{x(\theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y 軸を回転軸とする θ-回転

$$R_{y(\theta)} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$$

回転 (3)

原点を通る一般の直線を回転軸とする θ-回転　$R_{(a,b,c;\,\theta)}$

直線の方向ベクトルを $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とする（ただし，$|\vec{v}| = 1$）と，

$$R_{(a,b,c;\,\theta)}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)a^2 & (1-\cos\theta)ab - c\sin\theta & (1-\cos\theta)ca + b\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ab + c\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)b^2 & (1-\cos\theta)bc - a\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ca - b\sin\theta & (1-\cos\theta)bc + a\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)c^2 \end{pmatrix}$$

（性質）

$$R_{x(\theta)} = R_{(1,0,0;\,\theta)} = R_{(-1,0,0;\,-\theta)},$$

$$R_{y(\theta)} = R_{(0,1,0;\,\theta)} = R_{(0,-1,0;\,-\theta)},$$

$$R_{z(\theta)} = R_{(0,0,1;\,\theta)} = R_{(0,0,-1;\,-\theta)}.$$

鏡映

原点を通る平面 π に関する鏡映

$$S_{(a,b,c)} = \begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}$$