東京電機大学 情報環境学部

情報数学 III「平面の線形変換」

補助教材：*Mathematica* ノートブック

`im3-2-lintransR2.nb`

平成 23 年 10 月 19 日（水）

担当：佐藤 弘康

復習：線形変換

- 2 次正方行列 A から定まる $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像 f_A；

$$f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 ; \quad \vec{p} \longmapsto f_A(\vec{p}) = A\vec{p}.$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{とすると，} \quad f_A(\vec{p}) = A\vec{p} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}.$$

- 線形変換 f_A で点 $\vec{p}$ を移した点 $f_A(\vec{p})$ を，$\vec{p}$ の f_A による像という.

- 単位行列 E から定まる線形変換 f_E を恒等変換とよぶ.
  恒等変換は「どの点もまったく動かさない変換」である.

合成変換と逆変換

- 行列 A, B から定まる線形変換 f_A, f_B に対して，

  (1) 線形変換 f_A で写像した後で，；$(\vec{p} \mapsto f_A(\vec{p}))$

  (2) さらに線形変換 f_B で写像する；$(f_A(\vec{p}) \mapsto f_B(f_A(\vec{p}))$

  ことによって得られる新たな写像 $\vec{p} \mapsto f_B(f_A(\vec{p}))$ を f_A と f_B の合成とよび，$f_B \circ f_A$ と書く．

  線形変換の定義より，$f_B(f_A(\vec{p})) = (BA)\vec{p}$ である．つまり，$f_B \circ f_A = f_{BA}$.

- 線形変換 f_A に対し，$f_A \circ f_B = f_B \circ f_A = f_E$（恒等変換）となる f_B を f_A の逆変換とよぶ．
  - $f_A \circ f_B = f_B \circ f_A = f_E$ は $AB = BA = E$ を意味する．つまり，$B = A^{-1}$（逆行列）である．
  - 任意の線形変換に対してその逆変換が存在するわけではない．

拡大・縮小・せん断

拡大と縮小

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

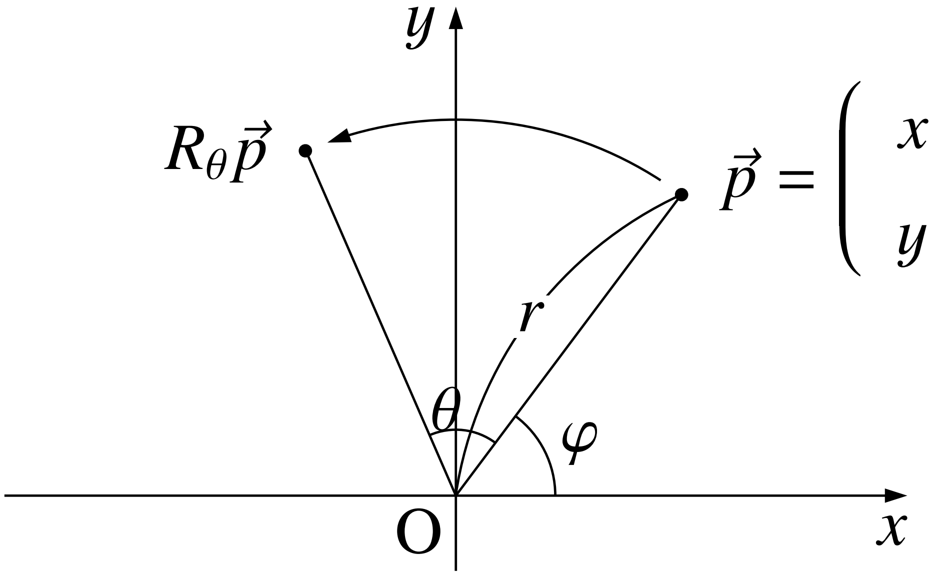
- $k > 1$ のとき，「拡大」
- $0 < |k| < 1$ に対し，「縮小」

せん断

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}.$$

回転

$\boxed{\text{原点を中心とする } \theta\text{-回転}}$ $\quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$



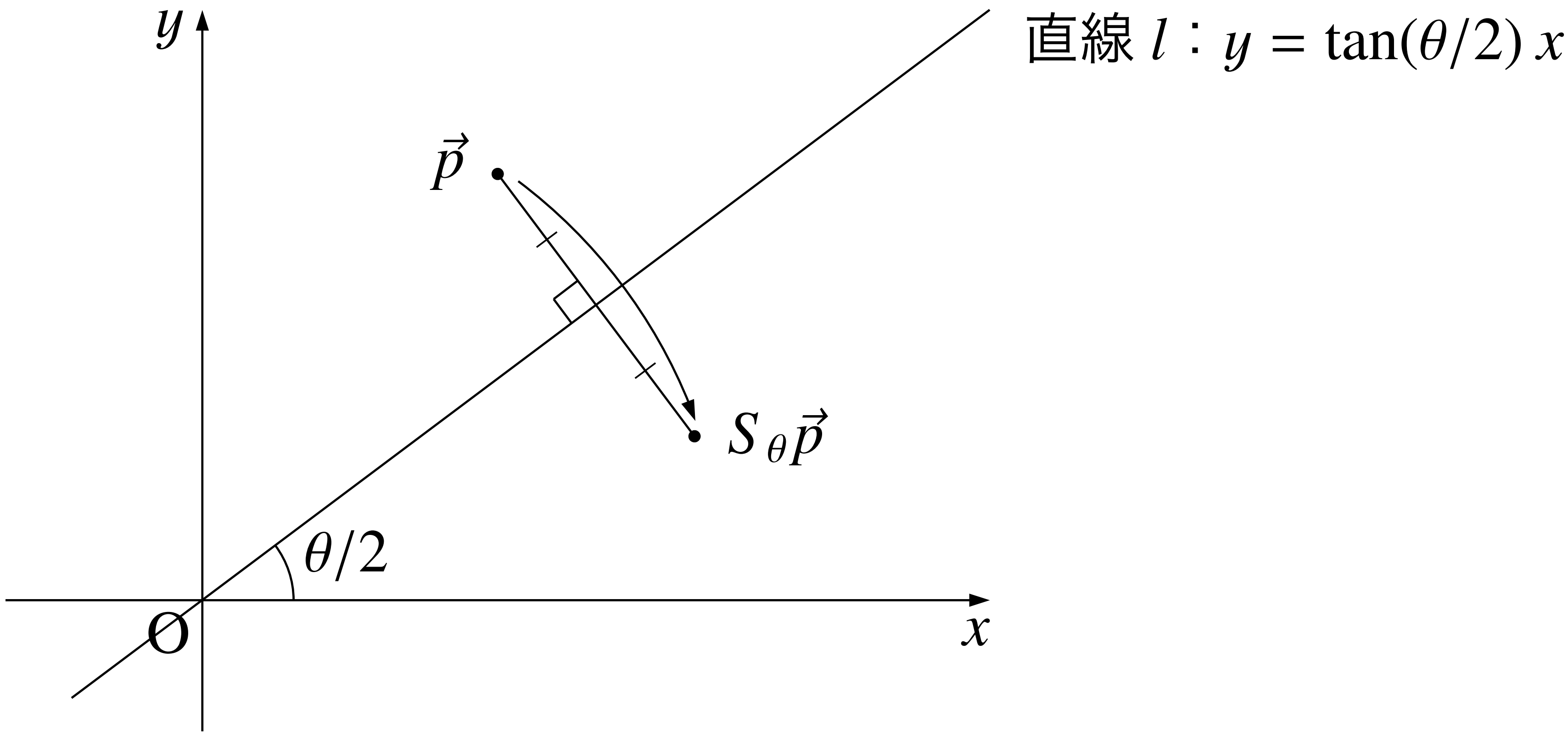
$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$R_\theta \vec{p} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) \\ r(\sin\theta\cos\varphi + \cos\varphi\sin\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\varphi) \\ r\sin(\theta+\varphi) \end{pmatrix} \qquad (\because \text{加法定理})$$

鏡映

$\boxed{\text{原点を通る直線 } l \text{ に関する鏡映}}$ $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$



鏡映：考え方

- 定義：直線 l に関する $\vec{p}$ の鏡映像 $S_\theta\vec{p}$ とは,
  - $\vec{p}$ を通り l に直交する直線 l' 上の点で,
  - l と l' との交点 $\vec{m}$ との距離が $\vec{p}$ から $\vec{m}$ との距離と等しい点.
- これを言い換えると

  (1) $\vec{p}$ と $S_\theta\vec{p}$ を通る直線は l と直交する.

  (2) $\vec{p}$ と $S_\theta\vec{p}$ の中点は直線 l 上にある.

$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $S_\theta\vec{p} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とおいて，上の (1), (2) の条件を x, y, X, Y, θ を用いて表す．そして，2 式を X, Y に関する連立方程式と思って解けばよい（X, Y を x, y, θ を用いて表す）.

線形変換と行列式

- 事実：一般の線形変換 f_A は

  拡大・縮小 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}$，せん断 $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，回転 R_θ，鏡映 S_ϕ

  の合成として表すことができる.
- つまり，行列 A はこれらの行列の積.
- 上の拡大・縮小変換によって図形の面積は $|k \times l|$ 倍される．せん断，回転，鏡映では面積は変わらない（1 倍）.
- これらは変換を与える行列の行列式の絶対値に等しい.

以上のことから，

$$|\det(A)| = \text{（線形変換 } f_A \text{ による図形の面積の倍率）}$$