情報数学III「線形代数基礎テスト」解説

$\boxed{1}$ (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+2\times0 & 1\times(-2)+2\times1 & 1\times0+2\times(-1) \\ (-1)\times1+0\times0 & (-1)\times(-2)+0\times1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad /\!/$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+(-2)\times(-1)+0\times1 & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad /\!/$$

(3)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{= {}^tA} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad /\!/$$

(4)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{= {}^tB} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \quad /\!/$$

$\boxed{2}$

(1) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1\times(-1) - 2\times 2 = -1-4 = \underline{-5}$ //

(2) (サラスの公式)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 1\times1\times(-2) + 3\times1\times2 + 2\times0\times(-1)$$
$$- \left\{ 2\times1\times2 + 1\times1\times(-1) + 3\times0\times(-2) \right\}$$
$$= -2 + 6 - (4-1)$$
$$= \underline{1}$$ //

(行列の基本変形)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3行目を(−1)倍して2行目に加える

1行目を(−1)倍して2行目に加える

1行目を(−2)倍して3行目に加える

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \underline{-}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2行目と3行目を入れかえる

$$= -(1\times1\times(-1)) = \underline{1}$$ //

サラスの公式

3 4次以上の正方行列に対し、"サラスの公式"に類似する公式はない！

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (-2) \times \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ある行（または列）を $\frac{1}{a}$ 倍すると、行列式の値は a 倍される

1行目を(−2)倍して3行目に加える

1行目を(−1)倍して4行目に加える

$$= (-2) \times \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = (-2) \times 1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & * \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & A \end{pmatrix} = a \det(A)$$

$$= (-2) \times 1 \times 1 \times \det\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (-2) \times ((-3) \times 3 - 3 \times (-1))$$

$$= (-2) \times (-9 + 3)$$

$$= (-2) \times (-6)$$

$$= \underline{12}$$

$\boxed{4}$ (1)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

↓ 拡大係数行列

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{1行目を}(-3)\text{倍して3行目に加える}]{\text{1行目を}(-2)\text{倍して2行目に加える}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{3行目を}(-\frac{1}{8})\text{倍}]{\text{2行目を}(-\frac{1}{3})\text{倍}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{2行目を}(-1)\text{倍して3行目に加える}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{2行目を}(-2)\text{倍して1行目に加える}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

: 簡約階段行列

↓

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$z = k$ とおくと $x = -k$, $y = -k$

したがって 解は $\begin{cases} x = -k \\ y = -k \\ z = k \end{cases}$ （kは任意の実数）

$\boxed{4}$ (2)
$$\begin{cases} x+2y-3z=7 \\ -x+y-3z=-1 \\ 3x+y+z=11 \end{cases}$$

↓ 拡大係数行列

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 7 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{1行目を(−3)倍して3行目に加える}]{\text{1行目を2行目に加える}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{3行目を}(-\frac{1}{5})\text{倍}]{\text{2行目を}(\frac{1}{3})\text{倍}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{2行目を(−1)倍して3行目に加える}]{\text{2行目を(−2)倍して1行目に加える}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$: 簡約階段行列

↓

$$\begin{cases} x+z=3 \\ y-2z=2 \end{cases}$$

$z=k$ とおくと $x=3-k$, $y=2k+2$

したがって解は
$$\begin{cases} x=3-k \\ y=2k+2 \\ z=k \end{cases}$$
(ただし、kは任意の実数)

(または ベクトル表示 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$)