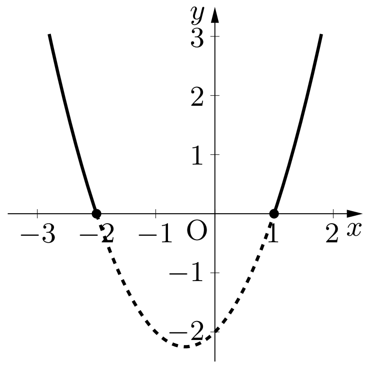
問題 3.7. (1) $f(x) = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$．頂点は $(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$，$y$ 切片は -2．下に凸のグラフ．

(2) グラフは右の図のようになる．

(3) $f(x) = (x+2)(x-1)$ より，$\underline{x = 1,\ -2}$．

(4) $\underline{x < -2,\ 1 < x}$．



問題 3.8. (1) $2x^2 + x - 1 = (2x-1)(x+1) > 0$．したがって，$\underline{x < -1,\ \frac{1}{2} < x}$．

(2) $-x^2 - x + 2 > 0 \iff x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) < 0$．したがって，$\underline{-2 < x < 1}$．

(3) $2x^2 - 5x - 1 = 0$ の解は $x = \frac{5\pm\sqrt{33}}{4}$．不等号の向きから $\underline{x \le \frac{5-\sqrt{33}}{4},\ \frac{5+\sqrt{33}}{4} \le x}$．

(4) $x^2 + x \le 3x + 24 \iff x^2 - 2x - 24 = (x-6)(x+4) \le 0$．したがって，$\underline{-4 \le x \le 6}$．

問題 3.9. (1) $f(x) = x^2 - 2kx - 3k + 4 = (x-k)^2 - k^2 - 3k + 4$

(2) $y = f(x)$ は下に凸のグラフだから，最小値は頂点の y 座標である．したがって，$\underline{-k^2 - 3k + 4}$．

(3) $f(x)$ の値が常に正であるための必要十分条件は $f(x)$ の最小値が正であることである．つまり，k に関する 2 次不等式 $-k^2 - 3k + 4 > 0$ の解を求めればよい．この不等式は $k^2 + 3k - 4 = (k+4)(k-1) < 0$ と式変形できるので，求める k の条件は $\underline{-4 < k < 1}$ である．

問題 3.10. $y = x^2 - 2kx + k + 2$ は下に凸のグラフだから最小値が 0 より小さければ x 軸と必ず 2 点で交わる．つまり，頂点の y 座標が 0 より小さくなるための k の条件を求めればよい（問題 3.9 を参照）．

また，「2 次方程式 $x^2 - 2kx + k + 2 = 0$ が 2 つの異なる実数解を持つ」ための条件を求めても良い．これは「判別式が正」という条件と同じ（同値）である．判別式は $(-2k)^2 - 4(k+2) = 4(k-2)(k+1)$．したがって，解は $\underline{k < -1, 2 < k}$．

問題 3.11. 2 次方程式が実数解を持たないのは判別式が負のときである．判別式は $k^2 - 4(-k+3) = (k+6)(k-2)$．したがって，解は $\underline{-6 < k < 2}$．また，グラフを使って考えてもよい（方程式の解はグラフと x 軸との交点の座標）．$y = x^2 - kx - k + 3$ は下に凸のグラフだから，これが x 軸と交わらないためにはグラフの頂点が x 軸よりも上（頂点の y 座標が正）であればよい（以下省略．問題 3.9 の解を参照せよ）．