線形代数（再履修）第 1 回小テスト問題

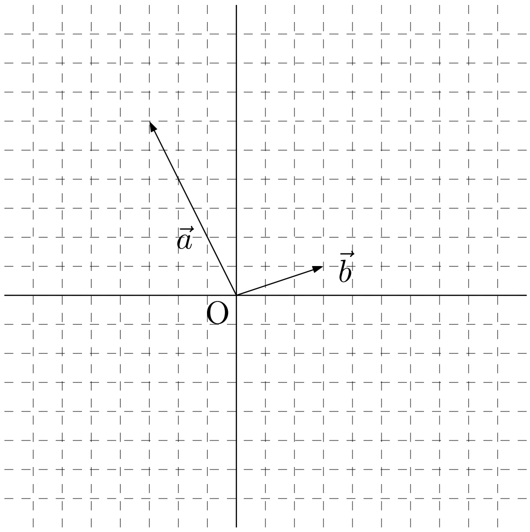
2010.9.17（担当：佐藤）

注意事項

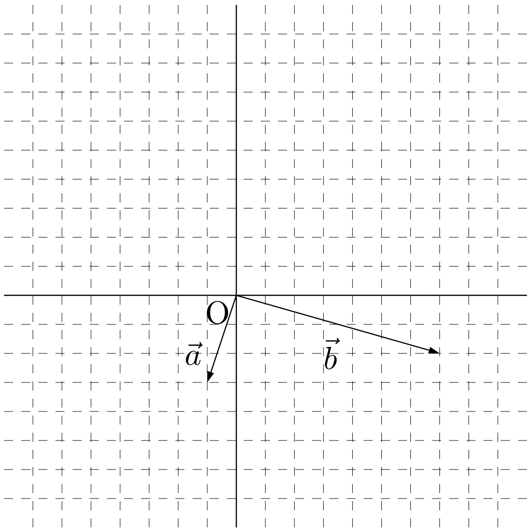
(1) 出題順に解答しなくてもよいが，どの問題の解かがわかるように解を記述すること．
(2) 答案は解を導きだす過程もできるだけ丁寧に記述すること．説明が不十分な解答は減点の対象とする．
(3) 字の粗暴な解答は減点の対象とする．
(4) 答案用紙が足りなくなった者は挙手をして試験監督者に追加の用紙をもらうこと．なお，答案用紙の裏を使用しても構わない．
(5) 試験時間終了前に すべての解答 が終わった者は途中退席しても構わない．
(6) 答案回収後，略解を配布する．必ず自己採点すること．

$\boxed{1}$ 図中のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，次のベクトルを図示しなさい．（各 8 点）

(1) $\vec{a}+2\vec{b}$



(2) $\vec{b}-2\vec{a}$



$\boxed{2}$ ベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ に対して，(i) 次のベクトル $\vec{u}$ の成分表示を求めなさい．また，(ii) 長さ $|\vec{u}|$ を計算しなさい．（各 8 点）

(1) $\vec{u}=3\vec{a}+2\vec{b}$

(2) $\vec{u}=\dfrac{2}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$

裏につづく

$\boxed{\mathbf{3}}$　次のベクトル $\vec{a}$ に対し，$c\vec{a}$ の長さが 1 になるような正の実数 c を求めなさい．（各 10 点）

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{4}}$　ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し，次の問に答えなさい．（各 10 点）

(1) ベクトル $\vec{a} - k\vec{b}$ の成分表示を k を用いて表しなさい．

(2) ベクトル $\vec{a} - k\vec{b}$ の長さが 1 になるような実数 k をすべて求めなさい．

$\boxed{\mathbf{5}}$　次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，(i) $|\vec{a}|$，(ii) $|\vec{b}|$，(iii) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$，(vi) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ の余弦（$\cos\theta$）を求めなさい．（各 9 点）

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{6}}$　空間ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ c \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ c-3 \\ c \end{pmatrix}$ が直交するように c を定めなさい．（10 点）

線形代数（再履修）第 **2** 回小テスト問題 **2010.10.1**（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の式を計算し，$a+bi$（ただし，a, b は実数）の形に直しなさい．（各 8 点）

(1) $(2+3i)(1-2i)$

(2) $\dfrac{i+2}{2-3i}$

(3) $(i)^7$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $z = 2 - i$ のに対し，以下の問に答えなさい．（8 点）

(1) z の絶対値を求めなさい．

(2) z の偏角を θ とするとき，$\tan\theta$ の値を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問に答えなさい．（各 9 点）

(1) $z = a + bi,\ w = c + di$（a, b, c, d は実数）に対し，

$$\frac{1}{2}\left(z\overline{w} + \overline{z}w\right)$$

を計算しなさい[*1]．

(2) 複素数を複素数平面のベクトルとみるとき，$\frac{1}{2}\left(z\overline{w} + \overline{z}w\right) = 0$ ならば，z と w は直交することを説明（証明）しなさい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ に対し，以下を計算しなさい．((3) のみ 9 点，他各 8 点)

(1) $A + B$

(2) $(A+B)(A+B)$

(3) $A^2 + 2AB + B^2$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい．（9 点）

$\boxed{\mathbf{6}}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ に対し，$AB = O$ を満たす 2 次正方行列 B を ひとつ 答えなさい．（8 点）

[*1] $\overline{z}$ は z の共役複素数 $\overline{z} = a - bi$.

線形代数（再履修）第 **3** 回小テスト問題 　　**2010.10.15**（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の（ア）〜（エ）の中から上三角行列をすべて選びなさい．（10 点）

（ア）$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 　（イ）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 　（ウ）$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（エ）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の（ア）〜（エ）の中から交代行列をすべて選びなさい．（10 点）

（ア）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 　（イ）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 　（ウ）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

（エ）$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，以下の行列を求めなさい．（各 10 点）

(1) ${}^tA$ 　(2) $A - {}^tA$ 　(3) $A + {}^tA$ 　(4) $A \cdot {}^tA$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 任意の正方行列 A に対し，$A \cdot {}^tA$ が対称行列になることを示しなさい[*1]．（10 点）

$\boxed{\mathbf{5}}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，以下を求めなさい．（各 10 点）

(1) A^2 　(2) A^3 　(3) A^{1000}

[*1] 転置行列の性質を使って証明（説明）しなさい

線形代数（再履修）第 4 回小テスト問題　　**2010.10.22**（担当：佐藤）

$\boxed{\textbf{1}}$　次の行列を行基本変形により簡約階段行列に変形しなさい．なお，どのような基本変形を施したのかわかるように記述しなさい．（各 20 点）

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 6 & -4 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\textbf{2}}$　基本行列の性質

- $P[i,\lambda]\,A$ は A の i 行目の各成分を λ 倍した行列である．
- $Q[i,j]\,A$ は，A の i 行目と j 行目を入れ替えた行列である．
- $R[i,j,\lambda]\,A$ は，A の j 行目を λ 倍して i 行目に加えた行列である．

を踏まえて，以下の問に答えなさい．

(1) $P[i,a]\,P[i,b] = P[i,c]$ と書ける．c を a,b を用いて表しなさい．（15 点）

(2) $Q[i,j]^2$ はどのような行列か答えなさい．（10 点）

(3) $R[i,j,a]\,R[i,j,b] = R[i,j,c]$ と書ける．c を a,b を用いて表しなさい．（15 点）

線形代数（再履修）第 **5** 回小テスト問題　　**2010.10.29**（担当：佐藤）

1　次の連立方程式の解を求めなさい．（各 20 点）

(1) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -x + 3y = -10 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ -2x + 2y = -1 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -2x + y + 3z = 9 \\ 2x - 3y - 2z = -10 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x - y - 2z + w = 5 \\ x - 2z + w = 1 \\ -2x - y - z + 3w = 6 \\ 2x + y + 3z + w = 4 \end{cases}$

2　連立方程式

$$\begin{cases} 5x + 2y - z = a \\ bx - cy + z = 3 \\ 2x + y + cz = -2 \end{cases}$$

の解が

$$x = -1, \quad y = 2, \quad z = 1$$

であるとする．このとき，実数 a, b, c の値を求めなさい．（20 点）

線形代数（再履修）第 **6** 回小テスト問題　　**2010.11.5**（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$　次の各連立方程式の <u>解と自由度</u> を答えなさい．（各 25 点）

$$(1)\ \begin{cases} 6x+4y=13 \\ -2x+2y+10z=-1 \\ 2x-y-7z=2 \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} x+2y+5z=7 \\ -x+y+4z=-1 \\ 3x+y=11 \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} -2x+3y+9z+4w=-4 \\ x-2y-5z-3w=3 \\ x-y-4z-w=1 \\ 2x+y-5z+4w=-4 \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$　連立方程式

$$\begin{cases} x-y+az=3 \\ 2x+by-2z=c \\ dx+2y+3z=e \end{cases}$$

の解は自由度が 1 で

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されるとする．このとき，実数 a, b, c, d, e の値を求めなさい．（各 5 点）

線形代数（再履修）第 **7** 回小テスト問題　　**2010.11.19**（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$　次の行列の階数を求めなさい．（各 20 点）

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{2}}$　連立方程式

$$\begin{cases} 2x + y + 9z = -2 \\ -2x + y + z = 10 \\ x + y + 7z = 1 \end{cases}$$

の解の自由度を求めなさい*1．（20 点）

$\boxed{\mathbf{3}}$　次の行列の階数を求めなさい*2．（40 点）

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

---

*1 解の存在性は仮定してよい（実際に解は存在する）．

*2 k の値で場合分けせよ．

線形代数（再履修）第8回小テスト問題

2010.11.26（担当：佐藤）

1 次の各問に答えなさい．（各 10 点）

(1) 正則行列の定義を述べなさい．

(2) 次の文章の空欄に入る適切な数式を答えなさい．

行列 A, B がともに正則行列のとき，その積 AB も正則行列で

$$(AB)^{-1} = \boxed{}$$

となる．

2 次の行列の逆行列を求めなさい．（各 20 点）

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

線形代数（再履修）第 9 回小テスト問題

2010.12.3（担当：佐藤）

1　次の各行列が正則行列かどうか判定しなさい．正則行列の場合は逆行列を求めなさい（各 17 点）

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 1 & 3 & -8 \\ -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2　次の各空欄に入る適切な基本行列 $P[i,\lambda]$, $Q[i,j]$, $R[i,j,\lambda]$ を答えなさい．ただし，各基本行列は以下の基本変形に対応するものとする（各 7 点）；

- $P[i,\lambda]\,A$ は A の i 行目の各成分を λ 倍した行列である．
- $Q[i,j]\,A$ は，A の i 行目と j 行目を入れ替えた行列である．
- $R[i,j,\lambda]\,A$ は，A の j 行目を λ 倍して i 行目に加えた行列である．

(1) $P[i,\lambda]^{-1} = \boxed{\text{（ア）}}$

(2) $Q[i,j]^{-1} = \boxed{\text{（イ）}}$

(3) $R[i,j,\lambda]^{-1} = \boxed{\text{（ウ）}}$

(4) $A = Q_{[2,3]} \cdot R_{[1,3,1]} \cdot R_{[2,3,-2]} \cdot P_{[2,-2]} \cdot R_{[3,1,1]} \cdot R_{[2,1,-3]}$ のとき，

$A^{-1} = R_{[2,1,3]} \cdot \boxed{\text{（エ）}} \cdot P_{[2,-1/2]} \cdot R_{[2,3,2]} \cdot R_{[1,3,-1]} \cdot \boxed{\text{（オ）}}$

(5) $A = P_{[3,\frac{1}{2}]} \cdot Q_{[2,3]} \cdot R_{[2,3,-2]} \cdot R_{[1,3,1]} \cdot R_{[2,1,\frac{1}{2}]} \cdot R_{[2,1,3]}$ のとき，

$A^{-1} = R_{[2,1,-3]} \cdot \boxed{\text{（カ）}} \cdot R_{[1,3,-1]} \cdot R_{[2,3,2]} \cdot Q_{[2,3]} \cdot \boxed{\text{（キ）}}$

線形代数（再履修）第 10 回小テスト問題　　**2010.12.10**（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$ 4 次の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ に対し，以下の問に答えなさい．（10 点）．

(1) σ の符号数 $\mathrm{sign}(\sigma)$ を求めなさい．

(2) τ の逆置換 τ^{-1} を求めなさい．

(3) 置換の積 $\tau \circ \sigma$ を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の行列の行列式を求めなさい．（各 10 点）

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 別に配布した「置換の行列表示」を参考にして以下の問の答えなさい．（各 10 点）

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ を計算しなさい．

(2) 3 次の置換 $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対応する置換行列 A_τ を求めなさい．

(3) (2) の置換 τ の符号数を求めなさい．

(4) (2) で求めた置換行列の行列式を求めなさい．

線形代数（再履修）第 **11** 回小テスト問題　　**2010.12.17**（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の行列の行列式を求めなさい．（各 25 点）

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 & 5 \\ 3 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(4) $$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -k & -4 \\ 3-6k & 4k-3 & 2 & 4k-1 \\ -4 & 6 & -3k-2 & 3 \\ 1 & -4 & 3k+1 & -1 \end{pmatrix}$$

線形代数（再履修）第 12 回小テスト問題

2010.12.24（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の行列の行列式を求めなさい．(20 点)．

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えなさい．

(1) A の行列式を求めなさい．（10 点）

(2) A の余因子行列 $\tilde{A}$ を求めなさい．（20 点）

(3) $A\tilde{A}$ を求めなさい．（10 点）

$\boxed{\mathbf{3}}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$，ベクトル $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えなさい．

(1) A の行列式を求めなさい．（10 点）

(2) 連立方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$，つまり

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

の解をクラメールの公式を用いて求めなさい．（30 点）