線形代数（再履修）第１回小テスト問題

2010.9.17（担当：佐藤）

注意事項

(1) 出題順に解答しなくてもよいが，どの問題の解かがわかるように解を記述すること．

(2) 答案は解を導きだす過程もできるだけ丁寧に記述すること．説明が不十分な解答は減点の対象とする．

(3) 字の粗暴な解答は減点の対象とする．

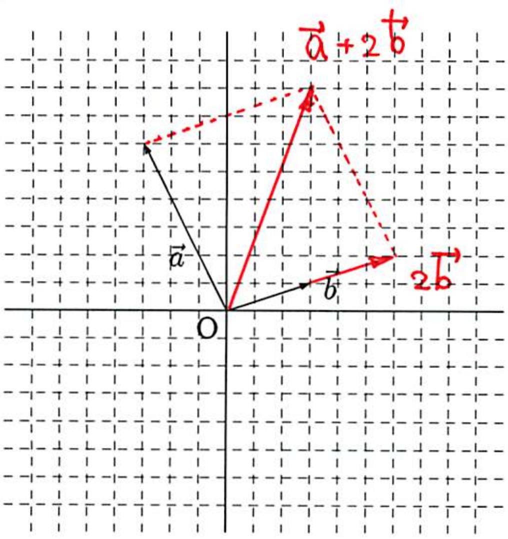
(4) 答案用紙が足りなくなった者は挙手をして試験監督者に追加の用紙をもらうこと．なお，答案用紙の裏を使用しても構わない．

(5) 試験時間終了前に すべての解答 が終わった者は途中退席しても構わない．

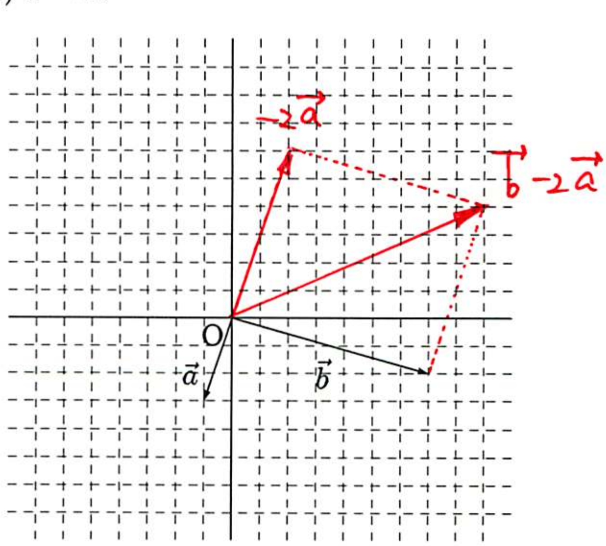
(6) 答案回収後，略解を配布する．必ず自己採点すること．

1 図中のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，次のベクトルを図示しなさい．（各８点）

(1) $\vec{a}+2\vec{b}$



(2) $\vec{b}-2\vec{a}$



2 ベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ に対して，(i) 次のベクトル $\vec{u}$ の成分表示を求めなさい．また，(ii) 長さ $|\vec{u}|$ を計算しなさい．（各８点）

(1) $\vec{u}=3\vec{a}+2\vec{b}$ $= 3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$

(2) $\vec{u}=\dfrac{2}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$

(1) (ii) $|\vec{u}|$ $\sqrt{1+64} = \sqrt{65}$

$= \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

裏につづく

$= \begin{pmatrix}2/3\\4/3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/3\\-1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$|\vec{u}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\boxed{3}$ 次のベクトル $\vec{a}$ に対し，$c\vec{a}$ の長さが 1 になるような正の実数 c を求めなさい．（各 10 点）

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$　　$c = \frac{1}{\sqrt{5}}$

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$　　$c = \frac{1}{5}$

$\boxed{4}$ ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し，次の問に答えなさい．（各 10 点）

(1) ベクトル $\vec{a} - k\vec{b}$ の成分表示を k を用いて表しなさい．　$\begin{pmatrix} 1-2k \\ -k \end{pmatrix}$

(2) ベクトル $\vec{a} - k\vec{b}$ の長さが 1 になるような実数 k をすべて求めなさい．　$k = 0$ または $\frac{4}{5}$

$\boxed{5}$ 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，(i) $|\vec{a}|$, (ii) $|\vec{b}|$, (iii) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, (vi) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ の余弦（$\cos\theta$）を求めなさい．（各 9 点）

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|\vec{a}| = \sqrt{14}$, $|\vec{b}| = \sqrt{6}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$

$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{14} \times \sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}$

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$|\vec{a}| = \sqrt{6}$, $|\vec{b}| = \sqrt{14}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\cos\theta = 0$

$\boxed{6}$ 空間ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ c \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ c-3 \\ c \end{pmatrix}$ が直交するように c を定めなさい．（10 点）

2つのベクトルが直交 $\Longleftrightarrow$ 内積が 0

$$\begin{pmatrix} 2 \\ c \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ c-3 \\ c \end{pmatrix} = 4 + c(c-3) - c = c^2 - 4c + 4$$
$$= (c-2)^2$$

よって $(c-2)^2 = 0$ となるのは $\underline{c = 2 \text{ のとき}}$

線形代数（再履修）第 2 回小テスト問題　　2010.10.1（担当：佐藤）

1 次の式を計算し，$a+bi$（ただし，a,b は実数）の形に直しなさい．（各 8 点）

(1) $(2+3i)(1-2i)$ $= 8-i$

(2) $\dfrac{i+2}{2-3i}$ $= \dfrac{1}{13} + \dfrac{8}{13}i = \dfrac{1}{13}(1+8i)$

(3) $(i)^7$ $= -i$

2 $z = 2-i$ のに対し，以下の問に答えなさい．（8 点）

(1) z の絶対値を求めなさい． $|z| = \sqrt{5}$

(2) z の偏角を θ とするとき，$\tan\theta$ の値を求めなさい． $\tan\theta = -\dfrac{1}{2}$

3 次の問に答えなさい．（各 9 点）

(1) $z = a+bi$, $w = c+di$（a,b,c,d は実数）に対し，

$$\frac{1}{2}(z\overline{w} + \overline{z}w) = ac+bd$$

を計算しなさい*1．

(2) 複素数を複素数平面のベクトルとみるとき，$\frac{1}{2}(z\overline{w}+\overline{z}w) = 0$ ならば，z と w は直交することを説明（証明）しなさい．

ヒント $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ とおくと

$\frac{1}{2}(z\overline{w}+\overline{z}w) = \vec{a}\cdot\vec{c}$

となる．

4 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ に対し，以下を計算しなさい．((3) のみ 9 点，他各 8 点)

(1) $A+B$ $= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $(A+B)(A+B)$ $= \begin{pmatrix} 22 & 9 \\ 21 & 37 \end{pmatrix}$

(3) $A^2+2AB+B^2$ $= \begin{pmatrix} 27 & 10 \\ 27 & 32 \end{pmatrix}$

5 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい．（9 点）

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

6 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ に対し，$AB = O$ を満たす 2 次正方行列 B を ひとつ 答えなさい．（8 点）

たくさんある

たとえば $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

---

*1 $\overline{z}$ は z の共役複素数 $\overline{z} = a-bi$.

$\boxed{3}$ (2)

$z = a + bi$　$w = c + di$ に対し,

$\vec{z} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

とおく. $\frac{1}{2}(z\bar{w} + \bar{z}w) = \vec{z} \cdot \vec{w}$ となる.

したがって

$$\frac{1}{2}(z\bar{w} + \bar{z}w) = 0 \iff \vec{z} \cdot \vec{w} = 0$$

$\iff$ $\vec{z}$ と $\vec{w}$ は直交する

(証明終)

線形代数（再履修）第 3 回小テスト解答

2010.10.15（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$ （イ）と（ウ）

$\boxed{\mathbf{2}}$ （ウ）

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) $^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $A - {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $A + {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$　(4) $A \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 13 & 14 \\ -3 & 14 & 18 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ （ヒント） 以下の 3 つのことを用いて証明しなさい．

- A が対称行列 $\Longleftrightarrow {}^tA = A$
- ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$
- ${}^t({}^tA) = A$

$\boxed{\mathbf{5}}$

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2000 & 1 & 0 \\ 1000 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

この授業に関する情報
http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/lare.html

線形代数（再履修）第 4 回小テスト解答　　　　**2010.10.22**（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) $P[i,a]\,P[i,b] = P[i,ab]$. つまり $\boldsymbol{c = ab}$

(2) $Q[i,j]^2$ は単位行列に等しい.

(3) $R[i,j,a]\,R[i,j,b] = R[i,j,a+b]$ と書ける. $\boldsymbol{c = a + b}$

この授業に関する情報
http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/lare.html

線形代数（再履修）第 5 回小テスト解答　　　　　　**2010.10.29**（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a = -2, \quad b = 2, \quad c = -2$

この授業に関する情報
http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/lare.html

線形代数（再履修）第 6 回小テスト解答 **2010.11.5**（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ （k は任意の実数）

解の自由度は 1.

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ （k は任意の実数）

解の自由度は 1.

(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ （k, l は任意の実数）

解の自由度は 2.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a = -3, \quad b = 0, \quad c = 2, \quad d = 1, \quad e = -3.$

この授業に関する情報
http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/lare.html

線形代数（再履修）第 7 回小テスト解答　　**2010.11.19**（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行・列基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore \text{階数は } \mathbf{2}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行・列基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore \text{階数は } \mathbf{3}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 9 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行・列基本変形}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

したがって，解の自由度は $3 - 2 = \mathbf{1}$．実際に，連立方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (k \text{ は任意の実数})$$

と書ける．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 行列の変形，考え方は中間試験の問題 [5] と同様である．中間試験の解答を参考にして考えてみよ．

$\underline{k = 1 \text{ のとき}}$，階数は $\mathbf{2}$

$\underline{k \neq 1 \text{ のとき}}$，階数は $\mathbf{3}$

この授業に関する情報
http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/lare.html

線形代数（再履修）第 8 回小テスト解答

2010.11.26（担当：佐藤）

1

(1)「逆行列をもつ行列」
「A に対し，$AB = BA = E_n$ を満たす行列 B が存在するとき，A を正則行列とよぶ」

(2) 行列 A, B がともに正則行列のとき，その積 AB も正則行列で

$$(AB)^{-1} = \boxed{B^{-1}A^{-1}}$$

となる．

2

(1) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

この授業に関する情報
http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/lare.html

線形代数（再履修）第 9 回小テスト解答　　　　**2010.12.3**（担当：佐藤）

1

(1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(2) 正則ではない.

(3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

2

（ア） $P[i, 1/\lambda]$　（イ） $Q[i, j]$　（ウ） $R[i, j, -\lambda]$　（エ） $R[3, 1, -1]$

（オ） $Q[2, 3]$　（カ） $R[2, 1, -1/2]$　（キ） $P[3, 2]$

この授業に関する情報
http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/lare.html

線形代数（再履修）第 10 回小テスト解答　　**2010.12.10**（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$

(2) $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) 6

(2) 6

(3) 0

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2) $A_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\mathrm{sign}(\tau) = 1$

(4) $\det(A_\tau) = 1$

この授業に関する情報
http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/lare.html

線形代数（再履修）第 **11** 回小テスト解答　　　　**2010.12.17**（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) 3

(2) -72

(3) 0

(4) 9

この授業に関する情報
http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/lare.html

線形代数（再履修）第 12 回小テスト解答

2010.12.24（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{-6}$

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) $\det(A) = \mathbf{0}$

(2) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(3) $A\tilde{A} = O$

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) $\det(A) = \mathbf{1}$

(2) $x = \dfrac{\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \mathbf{-2}$

$y = \dfrac{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \mathbf{8}$

$z = \dfrac{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \mathbf{1}$

この授業に関する情報
http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/lare.html