問題 1.1. 次のベクトルを各図中に図示しなさい．ただし，始点は原点でなくてもよい．

(1) 図 1 のベクトル $\vec{a}$ に対し，ベクトル $2\vec{a}$ および $-\dfrac{1}{2}\vec{a}$.

(2) 図 2 のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し，ベクトル $\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b}$.

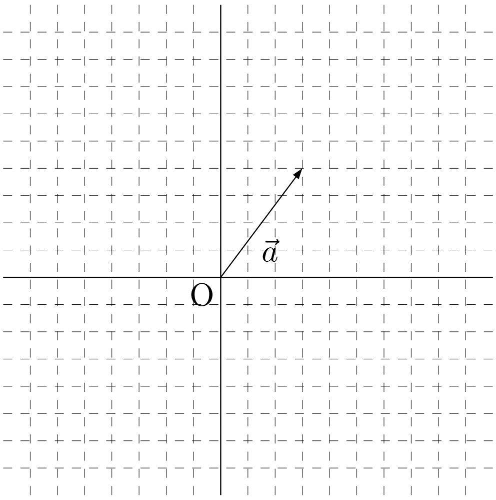

図 1

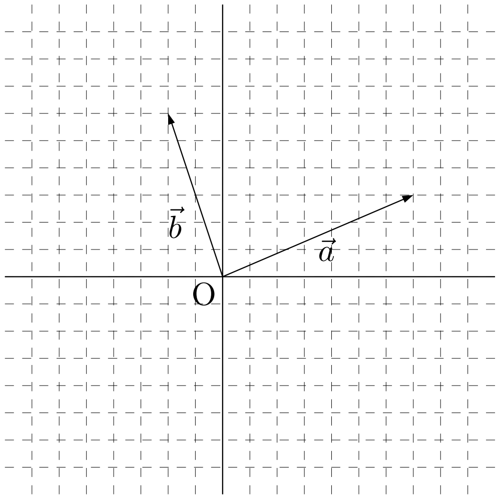

図 2

問題 1.2. 平面ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ に対し，次のベクトル $\vec{u}$ を成分表示しなさい．また，$\vec{u}$ の長さ $|\vec{u}|$ を求めなさい．

(1) $\vec{u} = -\vec{a} + \vec{b}$

(2) $\vec{u} = \vec{b} + 3\vec{a}$

(3) $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$

問題 1.3. 次のベクトル $\vec{a}$ に対し，$c\vec{a}$ の長さが 1 になるような実数 c を求めなさい．

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$

(3) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}$

問題 1.4. 次のベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ の (i) 長さ $|\vec{u}|, |\vec{v}|$, (ii) 内積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ および (iii) $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角 θ の余弦 $(\cos\theta)$ の値を求めなさい.

(1) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し，$\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{v} = -\vec{a} + 7\vec{b}$

(3) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(4) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$

(5) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に対し，$\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = -2\vec{a} - \vec{b}$

問題 1.5. 空間ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ c \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ c \end{pmatrix}$ が直交するように c を定めなさい.

問題 1.6. ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を 2 辺とする三角形の面積が $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$ に等しいことを示しなさい.[*1]

[*1] ヒント：$\triangle$OAB の面積が $\frac{1}{2}|\mathrm{OA}||\mathrm{OB}|\sin\theta$ と書ける（ただし $\theta = \angle\mathrm{AOB}$）. これと内積の性質 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$ と三角関数の性質 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を使って示しなさい.

問題 1.7. 次の式を計算し，$a + b\,i$（ただし，a, b は実数）の形に直しなさい.

(1) $(2 - 3i) - (-1 - 4i)$

(2) $3i(4 + i) - 4(2i - 1)$

(3) $(4 - 2i)(3i - 1)$

(4) $(2 + 3i)^2$

(5) $(i - 1)^3$

(6) i^5

(7) $\dfrac{3 + 2i}{3 - i}$

問題 1.8. 数学ビデオ「Dimensions」の第 5 章[*1]を鑑賞し，以下の文章の$\boxed{}$の中に入る言葉を答えなさい.

(1) このビデオの中では，(-1) 倍することを幾何学的に$\boxed{}$と解釈している.

(2) 複素数 z, w に対し, 積 zw の絶対値 $|zw|$ はそれぞれの絶対値 $|z|, |w|$ の$\boxed{}$に等しい.

(3) 複素数 z, w に対し，積 zw の偏角 $\arg(zw)$ はそれぞれの偏角 $\arg(z), \arg(w)$ の$\boxed{}$に等しい.

問題 1.9. 次の複素数 $z = \sqrt{3} + i, w = -2 + 2\sqrt{3}\,i$ に対し以下の問の答えなさい,

(1) z, w を複素数平面の点として図示しなさい.

(2) z, w の絶対値と偏角を求めなさい.

(3) 積 zw を計算し，複素数平面の点として図示しなさい.

(4) 積 zw の絶対値と偏角を求めなさい.

[*1] http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/lare.html を参照

問題 2.1. 次の行列 A, B に対し，$A+B$, AB, BA を計算しなさい（計算ができない場合もある）.

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 2.2. 次の行列 A の転置行列 ${}^tA$ を書きなさい.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

問題 2.3. 次の 2 次正方行列 A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

問題 2.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対し，次を計算しなさい．

(1) AB

(2) ${}^t(AB)$

(3) ${}^tA$ および ${}^tB$

(4) ${}^tA{}^tB$

(5) ${}^tB{}^tA$

問題 2.5. 次の行列が対称行列になるような a, b, c を求めなさい．

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ -3 & -1 & c \\ b & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 2.6. 次の行列が交代行列になるような a, b, c を求めなさい．

$$\begin{pmatrix} a & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ c & -1 & b \end{pmatrix}$$

問題 2.7. 次の行列について，各問に答えなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) AB を計算しなさい．

(2) A_1B_1 を計算しなさい．

(3) $A_1 + B_2$ を計算しなさい．

(4) A_2B_2 を計算しなさい．

(5) $AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1 + B_2 \\ O & A_2B_2 \end{pmatrix}$ となることを確かめなさい．

問題 2.8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，A^2, A^3, A^{1000} を求めなさい．

基本変形

以下の 3 つの操作を行列の行基本変形という（列に関する同様の操作は列基本変形）；

- j 行目と k 行目を入れ替える
- j 行目の各成分を c 倍する（c は実数）.
- j 行目を c 倍して，k 行目に加える.

簡約階段行列

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

行列 A が簡約階段行列とは，ある自然数 k と $j_1, j_2, \ldots, j_k$ が存在し次の条件を満たすときをいう；

(1) $1 \le i \le k$ に対し，A の (i, j_i) 成分は 1.
(2) $1 \le i \le k$，$1 \le j \le j_i - 1$ に対し，A の (i, j) 成分は 0.
(3) $i \ge k + 1$ ならば，A の (i, j) 成分は 0.
(4) $1 \le i \le k$ に対し，$1 \le l \le i - 1$ ならば，A の (l, j_i) 成分は 0.

問題 3.1. 次の行列が簡約階段行列かどうか判定し，そうでないものは行基本変形により簡約階段行列に変形しなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

例題 **3.2.** 行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を行基本変形により，簡約階段行列の形に変形しなさい.

解.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

問題 **3.3.** 次の行列を行基本変形により簡約階段行列の形に変形しなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

基本行列

- $P[i,\lambda] = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

  (i,i) 成分が λ，それ以外の対角成分は 1．その他の成分は 0．

- $Q[i,j] = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & 1 & 0 & & & \\ & & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad (i \neq j)$

  (i,i) 成分と (j,j) 成分が 0，それ以外の対角成分は 1．(i,j) 成分と (j,i) 成分は 1．その他の成分は 0．

- $R[i,j,\lambda] = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & & \\ & & & \ddots & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & \ddots & 0 & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad (i \neq j)$

  対角成分が 1．(i,j) 成分は λ．その他の成分は 0．

問題 **3.4.** 3 次の基本行列をすべて書きなさい．

基本変形と基本行列

行基本変形は基本行列を左からかけることに対応している；

- i 行目の各成分を λ 倍する（λ は実数）．$\longrightarrow$ 左から $P[i,\lambda]$ をかける．
- i 行目と j 行目を入れ替える $\longrightarrow$ 左から $Q[i,j]$ をかける．
- j 行目を λ 倍して，i 行目に加える．$\longrightarrow$ 左から $R[i,j,\lambda]$ をかける．

列基本変形は基本行列を右からかけることに対応している．

問題 **3.5.** 次を計算しなさい．

(1) $Q[1,2]\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $R[3,1,-3]\cdot R[2,1,-2]\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $Q[2,3]\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $R[3,2,-3]\cdot R[1,2,1]\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(5) $P[3,\frac{1}{4}]\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \end{pmatrix}$

(6) $R[2,3,1]\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

□ 逆行列を用いた連立方程式の解法

連立方程式の行列・ベクトル表示

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{4.1}$$

に対し，係数行列 A が正方行列*[1]であるとする．もし，A の逆行列が存在するとき，(4.1) の両辺に左から A^{-1} をかけると

$$\vec{x} = A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}.$$

つまり，$\underline{(4.1)\text{ の解は } \boldsymbol{\vec{x} = A^{-1}\vec{b}}}$ である．

問題 4.1. 次の各連立方程式を (i) $A\vec{x} = \vec{b}$ の形に書きなさい（係数行列 A と定数項ベクトル $\vec{b}$ を書きなさい）．(ii) 逆行列 A^{-1} を求めなさい．(iii) $A^{-1}\vec{b}$ を計算しなさい．(iv) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\vec{b}$ が連立方程式の解となることを示しなさい．

(1) $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x + 2y = -3 \end{cases}$

□ 掃き出し法

問題 4.2. 次の各連立方程式 (i) $A\vec{x} = \vec{b}$ の形に書きなさい（係数行列 A と定数項ベクトル $\vec{b}$ を書きなさい）．(ii) 係数拡大行列 $\begin{pmatrix} A & \vec{b} \end{pmatrix}$ を行基本変形を使って簡約階段行列に変形しなさい．(iii) 連立方程式の解を求めさない（必ず検算しなさい）．

(1) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ -3x + 2y + 2z = -1 \\ 5x + y - 3z = -2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 4 \\ 3x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + y - 3z - 4w = -6 \\ 2x + y + 5z + w = -6 \\ 2x + 2y + 2z - 3w = -10 \\ 3x + 6y - 2z + w = 4 \end{cases}$

*[1] 未知数の数と方程式の数が等しいとき．

□ 解が一意に決まらない連立方程式

例題 4.3. 次の連立 1 次方程式の解を求めなさい.

$$\begin{cases} x+2y-4z=2 \\ 2x+3y+7z=1 \\ 3x+5y+3z=3 \end{cases} \tag{4.1}$$

解. 連立方程式 (4.7) は，$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくことにより

$$A\vec{x}=\vec{b} \tag{4.2}$$

と行列・ベクトル表示することができる．拡大係数行列 $\begin{pmatrix} A & \vec{b} \end{pmatrix}$ を行基本変形により簡約階段行列に変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 26 & -4 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 26 & -4 \\ 0 & 1 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる．これは (4.7) が連立方程式

$$\begin{cases} x+26z=-4 \\ y-15z=3 \\ (\,0=0\,) \end{cases} \tag{4.3}$$

と簡約化できることを意味する（つまり，(4.7) の解は (4.3) の解であり，この逆もまた正しい）．(4.3) の式のうち自明でない 2 式に <u>共通に含まれる未知数 z を $z=k$ とおく</u> と

$$x=-4-26k, \qquad y=3+15k$$

となる．したがって，方程式 (4.7) の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -26 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{（ただし，}k\text{ は任意の実数）} \tag{4.4}$$

と表すことができる（解が一意に決まらず，無限個存在する）．

問題 4.4. 次の連立方程式の解を求めなさい．

(1) $\begin{cases} x+3y-2z=2 \\ 2x+7y-4z=3 \\ 3x+7y-6z=8 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 3x-4y+10z=1 \\ 3x-2y-z=-1 \\ 5x-4y+2z=-1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x-y+3z-2w=8 \\ x+2z+w=3 \\ -2x-y+z+6w=2 \\ 2x-y+3z-2w=8 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x+z-w=1 \\ -x+y-z+2w=0 \\ -3x+2y-3z+5w=-1 \end{cases}$

事実

連立方程式

$$A\vec{x}=\vec{b} \tag{4.5}$$

の解が

$$\vec{x}=\vec{v}+k_1\vec{u}_1+k_2\vec{u}_2+\ldots+k_r\vec{u}_r$$

と表されるとする (ただし, $k_1,\ldots,k_r$ は任意の実数)．このとき, ベクトル $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_r$ は (4.5) の定数項ベクトルを $\vec{0}$ に置き換えた連立方程式

$$A\vec{x}=\vec{0} \tag{4.6}$$

の解である．

例．（例題 4.3 について） $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$ は連立方程式

$$\begin{cases} x+2y-4z=\mathbf{0} \\ 2x+3y+7z=\mathbf{0} \\ 3x+5y+3z=\mathbf{0} \end{cases} \tag{4.7}$$

の解である（確かめよ）．

問題 4.5. 上の事実を踏まえて，問題 4.4 の解を検算しなさい．

□ 解の存在性

例題 4.6. 次の連立１次方程式の解が存在するか判定しなさい.

$$\begin{cases} x+3y-4z=3 \\ 2x-y+6z=-1 \\ 3x+2y+2z=3 \end{cases} \tag{4.1}$$

解. 連立方程式 (4.1) は，$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくことにより $A\vec{x}=\vec{b}$ と行列・ベクトル表示することができる．拡大係数行列 $\begin{pmatrix} A & \vec{b} \end{pmatrix}$ を行基本変形により簡約階段行列に変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

となる．これは (4.1) が連立方程式

$$\begin{cases} x+2z=0 \\ y-2z=0 \\ \qquad 0=1 \end{cases} \tag{4.2}$$

と簡約化できることを意味する．しかし，(4.2) の式のうち 3 つ目の式は明らかに成り立たない．つまり，連立方程式 (4.1) の 解は存在しない.

問題 4.7. 次の連立方程式の解が存在するかどうか判定しなさい.

(1) $\begin{cases} 2x+4z=3 \\ -x+y-3z=2 \\ 3x-2y+8z=3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x+y-3z=3 \\ x+y-z=1 \\ 3x-2y-8z=1 \end{cases}$

問題 4.8. 次の連立方程式が解を持つための実数 k の条件を求めなさい.

(1) $\begin{cases} 3x-2y+8z=k \\ 2x+4z=3 \\ -x+y-3z=2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x+y-3z=3 \\ 3x-2y-8z=k \\ x+y-z=1 \end{cases}$

□ 斉次連立方程式

斉次連立方程式

斉次連立方程式とは定数項（0 次の項）が 0 の 1 次連立方程式；

$$A\vec{x} = \vec{0} \tag{4.1}$$

- 斉次連立方程式は必ず解 $\vec{x} = \vec{0}$ を持つ．これを自明解という．
- $\vec{0}$ でない解を非自明解という．

斉次連立方程式の解の性質

- $\vec{v}$ が (4.1) の解ならば，任意の実数 k に対して $k\vec{v}$ も (4.1) の解である．
- $\vec{v}$, $\vec{u}$ が (4.1) の解ならば，$\vec{v} + \vec{u}$ も (4.1) の解である．

以上のことから，非自明な解が存在するとき，解は一般に

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_l\vec{v}_l \qquad (k_1, \ldots, k_l \text{ は実数})$$

と表される．

問題 **4.9.** 次の連立方程式の解を求めなさい．

(1) $\begin{cases} 3x - 4z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} -2y + z = 0 \\ -2x + 3y - z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$

問題 **4.10.** 次の連立方程式が非自明解を持つための実数 k の条件を求めなさい．

(1) $\begin{cases} -2y + z = 0 \\ -2x + 3y - z = 0 \\ 3x + ky + z = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x - 4z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ -x - 2y + kz = 0 \end{cases}$

行列の階数

任意の $m \times n$ 行列 A は行と列の基本変形により

$$\underset{m \times n \text{ 行列}}{A} \xrightarrow[\text{列基本変形}]{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

と変形できる．このとき，r を行列 A の階数とよび，$\mathrm{rank}(A)$ と書く．階数は $\mathrm{rank}(A) \leq \max\{m, n\}$ を満たす．

事実

行列 A が行基本変形により

$$\underset{m \times n \text{ 行列}}{A} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left.\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & 0 & * & \cdots & 0 & * & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & 0 & * & \cdots \\ & & & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right\} r \text{ 個}$$

と（簡約）階段行列に変形したとき，$(0\ \cdots\ 0)$ でない行の個数 r は A の階数に等しい．

5.1

行列の階数と連立方程式の解の自由度

A を $m \times n$ 行列，$r = \mathrm{rank}(A)$ とする．

一般の 1 次連立方程式の場合

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{5.1}$$

- $\mathrm{rank}(A \mid \vec{b}) = \mathrm{rank}(A) < n$ のとき，連立方程式 (5.1) は未知数の数が n 個で式の数が r 個の連立方程式に簡約化される．すべての式に共通に含まれる未知数の数は $(n-r)$ 個であるから，(5.1) の解は無限個存在し，解の自由度は $(n-r)$ である．
- $\mathrm{rank}(A \mid \vec{b}) = \mathrm{rank}(A) = n$ のとき，(5.1) の解の自由度は 0，つまり，解はただ 1 つに決まる．
- $\mathrm{rank}(A \mid \vec{b}) \neq \mathrm{rank}(A)$ のとき，(5.1) は解を持たない．

斉次連立方程式の場合

$$A\vec{x} = \vec{0} \tag{5.2}$$

- $\mathrm{rank}(A) = n$ のとき，(5.2) は非自明解を持たない．
- $\mathrm{rank}(A) < n$ のとき，(5.2) の非自明解が存在し，解の自由度は $(n-r)$ である．

問題 5.1. 問題 4.2, 4.4, 4.6, 4.9 の各連立方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ に対して，(i) $\mathrm{rank}(A)$ および $\mathrm{rank}(A \mid \vec{b})$ を求め，(ii) 階数と解の存在性，自由度との関係（上で述べた事）が成り立つことを確認しなさい．

問題 6.1. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -6 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えなさい.

(1) A' が A の逆行列であることを確かめなさい.
(2) B' が B の逆行列であることを確かめなさい.
(3) AB および $B'A'$ を計算しなさい.
(4) $(B'A')$ が (AB) の逆行列であることを確かめなさい.
(5) BA および $A'B'$ を計算しなさい.
(6) $(A'B')$ が (BA) の逆行列であることを確かめなさい.

問題 6.2. A, B を零行列でない正方行列とする．このとき，$AB = O$ ならば，A も B も正則行列でないことを示しなさい.

問題 6.3. 次の各行列は 3 次の基本行列 である．各行列の逆行列を求めなさい[*1].

(1) $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(11) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(12) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$

[*1] これらの行列を $3 \times n$ 行列 A に左から掛けることがどのような行基本変形に対応しているかを考えて，逆行列を求めなさい（基本行列についてはプリント p.10, 11 を参照せよ）.

逆行列の求め方

- n 次正則行列 A が行基本変形により単位行列 E_n に変形できたとしよう．このとき，行基本変形は基本行列を左から掛ける操作に対応することから

$$M_1M_2\cdots M_kA = E_n \tag{6.1}$$

　となるような基本行列 $M_1,\ldots,M_k$ が存在する．
- 逆行列の定義より，(6.1) は $\boldsymbol{A^{-1} = M_1M_2\cdots M_k}$ であること意味する．
- $n\times 2n$ 行列 $(\,A\,|\,E_n\,)$ に (6.1) と同じ行基本変形を施すと

$$\left(\,A\;\middle|\;E_n\,\right)\xrightarrow[M_1M_2\cdots M_k\times]{}\left(\,M_1M_2\cdots M_kA\;\middle|\;M_1M_2\cdots M_k\,\right)=\left(\,E_n\;\middle|\;A^{-1}\,\right)$$

　となる．
- 以上のことから，$(\,\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{E_n}\,)$ を行基本変形により $(\,\boldsymbol{E_n}\,|\,\boldsymbol{P}\,)$ の形に変形したとき，$\boldsymbol{P}$ が $\boldsymbol{A}$ の逆行列であることがわかる．

例題 **6.4.** 次の行列の逆行列を求めなさい．

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\4&3&4\\0&1&2\end{pmatrix}$$

解．

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\4&3&4&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_{[2,1,-4]}\times]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\0&7&8&-4&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_{[1,3,1]}R_{[2,3,-7]}\times]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&1\\0&0&-6&-4&1&-7\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[P_{[2,-\frac{1}{6}]}\times]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&1\\0&0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}&\frac{7}{6}\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_{[1,2,-1]}R_{[3,2,-2]}\times]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}\\0&0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}&\frac{7}{6}\\0&1&0&-\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\end{array}\right)\xrightarrow[Q_{[2,3]}\times]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}\\0&1&0&-\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\\0&0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}&\frac{7}{6}\end{array}\right).$$

したがって，

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}\\-\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}&\frac{7}{6}\end{pmatrix}.$$

問題 6.5. 例題 6.4 の方法を使って，問題 6.1 の行列 A, B の逆行列を計算しなさい.

問題 6.6. 次の行列の逆行列を求めなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

問題 6.7. 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & k & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

が正則行列になるための k の条件を求めなさい．また，そのときの A の逆行列を求めなさい.

正則行列の基本行列による積表示

n 次正則行列 A が行基本変形により単位行列 E_n に変形できたとしよう．行基本変形は基本行列を左からかけることに対応することから，このとき，

$$M_1 M_2 \cdots M_k A = E_n \tag{6.1}$$

となるような適当な基本行列 $M_1, \ldots, M_k$ が存在する．ここで，(6.1) の両辺に左から $M_k^{-1} M_{k-1}^{-1} \cdots M_1^{-1}$ をかける．すると，左辺は

$$\begin{aligned}(M_k^{-1} \cdots M_2^{-1} M_1^{-1})(M_1 M_2 \cdots M_k A) =& (M_k^{-1} \cdots M_2^{-1})(M_1^{-1} M_1)(M_2 \cdots M_k A) \\ =& (M_k^{-1} \cdots M_2^{-1})(M_2 \cdots M_k A) \\ & \vdots \\ =& A\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$A = M_k^{-1} M_{k-1}^{-1} \cdots M_1^{-1}$$

を得る．基本行列の逆行列も基本行列なので，正則行列は基本行列の積として表せることがわかる（簡約階段行列への基本変形の仕方が一意的でないように，基本行列の積表示の仕方も 一意的ではない）．

例題 **6.8.** 次の行列の基本行列の積で表しなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

解． 例題 6.4（プリント p.20）の基本変形の手順から，

$$Q_{[2,3]} R_{[1,2,-1]} R_{[3,2,-2]} P_{[2,-\frac{1}{6}]} R_{[1,3,1]} R_{[2,3,-7]} R_{[2,1,-4]} A = E_3.$$

したがって，

$$\begin{aligned}A =& R_{[2,1,-4]}{}^{-1} R_{[2,3,-7]}{}^{-1} R_{[1,3,1]}{}^{-1} P_{[2,-\frac{1}{6}]}{}^{-1} R_{[3,2,-2]}{}^{-1} R_{[1,2,-1]}{}^{-1} Q_{[2,3]}{}^{-1} \\ =& R_{[2,1,4]} R_{[2,3,7]} R_{[1,3,-1]} P_{[2,-6]} R_{[3,2,2]} R_{[1,2,1]} Q_{[2,3]}\end{aligned}$$

問題 **6.9.** 例題 の方法を使って，問題 6.6 の各行列を基本行列の積で表しなさい．

行列式

n 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ に対し，A の行列式 $\mathbf{det}(\boldsymbol{A})$ を

$$\det(A) = \sum_{\sigma : n \text{ 次の置換}} \mathrm{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

と定義する．

問題 **7.1.** 3 次の置換をすべて書き出し，その符号を求めなさい．

$$\mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} = \qquad , \mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} = \qquad , \mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} = \qquad ,$$

$$\mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} = \qquad , \mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} = \qquad , \mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} = \qquad .$$

問題 **7.2.** 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式 $\det(A)$ を A の成分を用いて具体的に書きなさい．

問題 **7.3.** サラスの公式を用いて，次の行列の行列式を求めなさい．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$　(2) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$　(3) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

問題 **7.4.** 問題 7.3 の行列 A, B, C について，以下の問に答えなさい．

(1) 行列の積 AB を計算し，行列式 $\det(AB)$ を求めなさい．

(2) C の逆行列 C^{-1} を計算し，行列式 $\det(C^{-1})$ を求めなさい．

問題 **7.5.** 3 次の基本行列 $P[i, \lambda]$, $Q[i, j]$, $R[i, j, \lambda]$ [*1]の行列式を求めなさい．

[*1] プリント p.10 を参照せよ．

行列式の性質

d-1) 行に関する線型性：

$$\det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ a_{i1}+cb_{i1} \ \cdots \ a_{ij}+cb_{ij} \ \cdots \ a_{in}+cb_{in} \\ & \cdots & \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ a_{i1} \ \cdots \ a_{ij} \ \cdots \ a_{in} \\ & \cdots & \end{pmatrix} + c\det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ b_{i1} \ \cdots \ b_{ij} \ \cdots \ b_{in} \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

d-2) 任意の行の入れ換えに対して，(-1) 倍される：

$$\det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ a_{i1} \ \cdots \ a_{ij} \ \cdots \ a_{in} \\ & \cdots & \\ a_{k1} \ \cdots \ a_{kj} \ \cdots \ a_{kn} \\ & \cdots & \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ a_{k1} \ \cdots \ a_{kj} \ \cdots \ a_{kn} \\ & \cdots & \\ a_{i1} \ \cdots \ a_{ij} \ \cdots \ a_{in} \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

d-3) 任意の行をスカラー倍して，別の行に加えても行列式は変わらない：

$$\det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ a_{i1} \ \cdots \ a_{ij} \ \cdots \ a_{in} \\ & \cdots & \\ a_{k1} \ \cdots \ a_{kj} \ \cdots \ a_{kn} \\ & \cdots & \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} & & \cdots & & \\ a_{i1}+c\,a_{k1} & \cdots & a_{ij}+c\,a_{kj} & \cdots & a_{in}+c\,a_{kn} \\ & & \cdots & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ & & \cdots & & \end{pmatrix}$$

d-4) $\det\left(\begin{array}{c|ccc} a & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \det\left(\begin{array}{c|ccc} a & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & & & \\ \vdots & & A & \\ * & & & \end{array}\right) = a\cdot\det(A)$

d-5) $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$

d-6) $\det({}^tA)=\det(A)$

（この性質から，d-1) 〜 3) は列に関する操作ついても同様のことが成り立つ）

例題 **7.6.** 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2-\sqrt{2} & -4+5\sqrt{3} & -5 \\ 1 & -6+4\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1+\sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式を求めよ．

解． 方針：行列式の性質 d-2，d-3) を使って行列を変形し，d-4) を使って行列のサイズを小さくしていく．

$$=\det\begin{pmatrix} 3 & 2-\sqrt{2} & -4+5\sqrt{3} & -5 \\ 1 & -6+4\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1+\sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(4 行目を適当にスカラー倍して 1, 2, 3 行目に加えて，1 行目と 4 行目を入れ換える)

$$=\det\begin{pmatrix} 0 & 2-7\sqrt{2} & -7+5\sqrt{3} & -5 \\ 0 & -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ \hline 0 & -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ 0 & 2-7\sqrt{2} & -7+5\sqrt{3} & -5 \end{array}\right)$$

$$=-\det\begin{pmatrix} -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ 2-7\sqrt{2} & -7+5\sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$$

(2 行目を (−5) 倍して 3 行目に加える)

$$=-\det\begin{pmatrix} -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ -8+3\sqrt{2} & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(1 行目と 2 行目を交換し，1 列目と 3 列目を入れ換える)

$$=\det\begin{pmatrix} 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ -8+3\sqrt{2} & 3 & 0 \end{pmatrix} = -\det\left(\begin{array}{c|cc} -1 & -2+\sqrt{3} & 2-2\sqrt{2} \\ \hline 0 & 2 & -6+2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & -8+3\sqrt{2} \end{array}\right)$$

$$=\det\begin{pmatrix} 2 & -6+2\sqrt{2} \\ 3 & -8+3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$=2(-8+3\sqrt{2})-3(-6+2\sqrt{2})$$

$$=\mathbf{2}.$$

問題 7.7. 問題 7.3 の行列 A, B, C の行列式を行基本変形を用いて（例題 7.6 を参考にして）求めなさい.

問題 7.8. 次の行列の行列式を求めなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

例題 7.9. 行列 $\begin{pmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{pmatrix}$ の行列式を求めなさい.

解.

$$\det\begin{pmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{pmatrix}$$

(2 列目を 1 列目に加える)

$$=\det\begin{pmatrix} a+b & -c & -b \\ a+b & a+b+c & -a \\ -b-a & -a & a+b+c \end{pmatrix} = (a+b)\det\begin{pmatrix} 1 & -c & -b \\ 1 & a+b+c & -a \\ -1 & -a & a+b+c \end{pmatrix}$$

(1 行目を 2 行目から引き, 1 行目を 3 行目に加える)

$$=(a+b)\det\left(\begin{array}{c|cc} 1 & -c & -b \\ \hline 0 & a+b+2c & -a+b \\ 0 & -a-c & a+c \end{array}\right) = (a+b)\det\begin{pmatrix} a+b+2c & -a+b \\ -a-c & a+c \end{pmatrix}$$

$$=(a+b)(a+c)\det\begin{pmatrix} a+b+2c & -a+b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=(a+b)(a+c)\{(a+b+2c)+(-a+b)\} = \boldsymbol{2(a+b)(b+c)(a+c)}.$$

問題 7.10. 行列 $\begin{pmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{pmatrix}$ の行列式を求めなさい.

問題 7.11. 正則行列 A に対し，$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ が成り立つことを示しなさい.

置換の行列表示

n 次の置換 σ に対し，n 次正方行列 A_σ を以下の 3 つの条件を満たす行列として定める；

- A_σ の各列は 1 となる成分をただ 1 つだけ持ち，残りの成分はすべて 0 である.
- A_σ の各行は 1 となる成分をただ 1 つだけ持ち，残りの成分はすべて 0 である.
- $A_\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(1) \\ \sigma(2) \\ \vdots \\ \sigma(n) \end{pmatrix}$

このように定まる行列 A_σ を σ に対応する置換行列とよぶ.

例. 4 次の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対応する置換行列 A_σ は

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である.

置換行列の性質

(1) $A_\sigma A_\tau = A_{\sigma\circ\tau}$

(2) ${A_\sigma}^{-1} = A_{\sigma^{-1}}$

(3) $\det(A_\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma)$

余因子

- n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し，$(n-1)$ 次正方行列 A_{ij} を「A から i 行目と j 列目を取り除いた行列」と定義する．
- $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ を A の $\boldsymbol{(i,j)}$ 余因子とよぶ．

行列式の余因子展開

A を n 次正方行列，Δ_{ij} を A の (i,j) 余因子とする．このとき，任意の i に対し，以下が成り立つ；

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in},$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\Delta_{ji} = a_{1i}\Delta_{1i} + a_{2i}\Delta_{2i} + \cdots + a_{ni}\Delta_{ni}.$$

- この公式は行列式の性質 d-1)，d-2)，d-4) から導きだされる．
- 行列の性質 d-4) は，第 1 行（または第 1 列）に関する余因子展開の特別な場合である．
- 行列式を求めるとき，成分 0 を多く含む行（または列）に関して余因子展開すると行列式の計算が比較的簡単になる．

例題 **7.12.** 次の行列 A の行列式を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

解. 行列式の性質 d-3) を用いて，なるべく 0 を多く含む行（または列）をつくるように行列を変形していき，その行（または列）に関して行列式を余因子展開する．

(第 1 列を (-1) 倍して第 2 列，第 3 列にそれぞれ加える)

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 12 & 1 & 2 & 5 \\ 11 & 5 & 4 & 6 \\ 10 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} = 2 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 12 & 1 & 1 & 5 \\ 11 & 5 & 2 & 6 \\ 10 & -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

(第 3 列を (-1) 倍して第 2 列に加える)

$$= 2 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 12 & 0 & 1 & 5 \\ 11 & 3 & 2 & 6 \\ 10 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

(第 3 列に関して展開)

$$= 2 \times 3 \times \left\{(-1)^{3+2} \times \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 12 & 1 & 5 \\ 10 & -1 & 7 \end{pmatrix}\right\} = (-6) \times \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 12 & 1 & 5 \\ 10 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

(第 2 列を (-1) 倍して第 1 列に，(-4) 倍して第 3 列にそれぞれ加える)

$$= (-6) \times \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 11 & 1 & 1 \\ 11 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

(第 1 行に関して展開)

$$= (-6) \times 1 \times \left\{(-1)^{1+2} \times \det\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}\right\} = 6 \times \det\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= 6(121 - 11) = \mathbf{660}.$$

問題 **7.13.** 次の行列の行列式を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -5 & 4 & -7 & -8 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

余因子行列

n 次正方行列 A に対し，A の余因子 Δ_{ij} を成分とする行列

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

を A の余因子行列とよぶ（$\tilde{A}$ の成分と余因子の添字のつけ方の注意せよ）.

例題 **7.14.** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ に対し，以下の問に答えなさい.

(1) A の行列式を求めなさい.

(2) A の余因子行列 $\tilde{A}$ を求めなさい.

(3) $A\tilde{A}$ および $\tilde{A}A$ を計算しなさい.

解. (1) 第 1 列について余因子展開すると

$$\begin{aligned} \det(A) =& 2 \times \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + (-1) \times \det \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ =& 2 \times (-3) + (-1) \times (-12) = \mathbf{6}. \end{aligned}$$

(2) 各余因子 Δ_{ij} は

$$\Delta_{11} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{-3}, \quad \Delta_{12} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{-4},$$

$$\Delta_{13} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{-1}, \quad \Delta_{21} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{12},$$

$$\Delta_{22} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{8}, \quad \Delta_{23} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{2},$$

$$\Delta_{31} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \mathbf{9}, \quad \Delta_{32} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \mathbf{6},$$

$$\Delta_{33} = (-1)^6 \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{3}.$$

となるので，余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 9 \\ -4 & 8 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3) $A\tilde{A} = \tilde{A}A = 6E_3$ となる（計算して確かめよ）.

余因子行列の性質

- 余因子展開の式 (p.28 を参照) は，$A\tilde{A}$ および $\tilde{A}A$ の 対角成分がすべて $\det(A)$ に等しい ことを意味している.
- 一方，$A\tilde{A}$ および $\tilde{A}A$ の 対角成分以外の成分はすべて 0 となる.
  （証明）$A\tilde{A}$ の (i,j) 成分が 0 になることを示す（$i \neq j$）.
  - 行列 $A = (a_{kl})$ から，次のようにして行列 $A' = (a'_{kl})$ を構成する；
    A' の j 行目は A の i 行目に等しい（$a'_{jk} = a_{ik}, k = 1, \ldots, n$）.
    A' の $l(\neq j)$ 行目は A の l 行目に等しい.（$a'_{lk} = a_{lk}$, $l \neq j$, $k = 1, \ldots, n$）.
  - A' は i 行目と j 行目が等しいので，行列式の性質から $\det(A') = 0$.
  - A' の余因子 Δ'_{jk} と A の余因子 Δ_{jk} は等しい（$k = 1, 2, \ldots, n$）.
  - A' を j 行目に関して余因子展開すると

$$\begin{aligned} 0 = \det(A') &= a'_{j1}\Delta'_{j1} + a'_{j2}\Delta'_{j2} + \cdots + a'_{jn}\Delta'_{jn} \\ &= a_{i1}\Delta_{j1} + a_{i2}\Delta_{j2} + \cdots + a_{in}\Delta_{jn}. \end{aligned}$$

    これは「$A\tilde{A}$ の (i,j) 成分が 0 になること」を意味する.
- 以上のことから，余因子行列は

$$A\,\tilde{A} = \tilde{A}\,A = \det(A)\,E_n$$

  を満たす．特に，$\det(A) \neq 0$ ならば，$\boldsymbol{A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\tilde{A}}$ となる.

問題 **7.15.** 問題 6.6（p.21，演習問題 6.2）の各行列を A とおく．次の問に答えなさい.

(1) A の行列式 $\det(A)$ を求めなさい.
(2) A の余因子行列 $\tilde{A}$ を求めなさい.
(3) 問題 6.6 で求めた A の逆行列と $\dfrac{1}{\det(A)}\tilde{A}$ が等しくなることを確かめなさい.

クラメールの公式

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ と n 項数ベクトル $\vec{b} = (b_i)$ に対し，A の第 j 列を $\vec{b}$ に置き換えた行列を A_j とおく；

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

行列 A が正則行列のとき，連立方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ の解は

$$\vec{x} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(A_1) \\ \det(A_2) \\ \vdots \\ \det(A_n) \end{pmatrix}$$

となる．これをクラメールの公式という．

例題 **7.16.** 次の連立方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ -3x + 2y + 2z = -1 \\ 5x + y - 3z = -2 \end{cases} \tag{7.1}$$

解. 連立方程式 (7.1) を行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる．係数行列を $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$，定数項ベクトルを $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ とおき，A の第 j 列を $\vec{b}$ に置き換えた行列を A_j とおく（$j = 1, 2, 3$）．つまり，

$$A_1 = \left(\boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{matrix}\right), \quad A_2 = \left(\begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{matrix}\right), \quad A_3 = \left(\begin{matrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}}\right).$$

A および A_j の行列式を計算すると

$$\det(A_1) = -26, \quad \det(A_2) = 26, \quad \det(A_3) = -52, \quad \det(A) = -26.$$

したがって，クラメールの公式から，(7.1) の解は

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \mathbf{1}, \quad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \mathbf{-1}, \quad z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \mathbf{2}.$$

問題 7.17. 次の連立方程式[*1]の解をクラメールの公式を用いて求めなさい．

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 4 \\ 3x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

（付録：クラメールの公式の証明）．

- A_j の構成の仕方より，A_j の (l, j) 余因子 Δ'_{lj} は A の (l, j) 余因子 Δ_{lj} に等しいことがわかる（$l = 1, 2, \ldots, n$）．
- $\det(A_j)$ を第 j 列に関して余因子展開すると

$$\begin{aligned} \det(A_j) =& \Delta'_{1j} b_1 + \Delta'_{2j} b_2 + \cdots + \Delta'_{nj} b_n \\ =& \Delta_{1j} b_1 + \Delta_{2j} b_2 + \cdots + \Delta_{nj} b_n. \end{aligned}$$

  したがって，

$$\begin{aligned} \tilde{A}\vec{b} &= \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Delta_{11} b_1 + \Delta_{21} b_2 + \cdots + \Delta_{n1} b_n \\ \Delta_{12} b_1 + \Delta_{22} b_2 + \cdots + \Delta_{n2} b_n \\ \vdots \\ \Delta_{1n} b_1 + \Delta_{2n} b_2 + \cdots + \Delta_{nn} b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(A_1) \\ \det(A_2) \\ \vdots \\ \det(A_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- A が正則行列ならば，$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$ であるから，連立方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ の解は

$$\vec{x} = A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}\vec{b} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(A_1) \\ \det(A_2) \\ \vdots \\ \det(A_n) \end{pmatrix}.$$

□

[*1] プリント p.12，問題 3.5 (2)