問題 1.1. （省略）

問題 1.2. (1) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $|\vec{u}| = \sqrt{10}$ (2) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|\vec{u}| = \sqrt{50}$

(3) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $|\vec{u}| = 5$

問題 1.3. ベクトル $\vec{a}$ と実数 c に対し，$|c\,\vec{a}| = |c| \cdot |\vec{a}|$ が成り立つ．ここで，$|c|$ は実数の絶対値を表し，$|\vec{a}|$ はベクトルの長さを表すことに注意せよ．したがって，$|c\vec{a}| = 1$ となるためには $c = \pm\dfrac{1}{|\vec{a}|}$ とすればよい．

(1) $c = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $c = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (3) $c = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

問題 1.4. (1) $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 4$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ （つまり，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$）．

(2) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$. したがって，$|\vec{u}| = \sqrt{10}$, $|\vec{v}| = \sqrt{90}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, $\cos\theta = 0$ （つまり，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$）．

(3) $|\vec{u}| = \sqrt{21}$, $|\vec{v}| = \sqrt{29}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$, $\cos\theta = -\dfrac{6}{\sqrt{609}}$ （$\cos\theta < 0$ であるから，θ が鈍角であることがわかる）．

(4) $|\vec{u}| = \sqrt{14}$, $|\vec{v}| = \sqrt{78}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $\cos\theta = 3\dfrac{6}{\sqrt{1092}}$ （$\cos\theta > 0$ であるから，θ が鋭角であることがわかる）．

(5) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$. したがって，$|\vec{u}| = \sqrt{11}$, $|\vec{v}| = \sqrt{5}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -9$, $\cos\theta = -\dfrac{9}{\sqrt{55}}$.

問題 1.5. $c = 1$

問題 1.6. （省略）

問題 **1.7.** 次の式を計算し，$a + b\,i$（ただし，a, b は実数）の形に直しなさい.

(1) $(2 - 3i) - (-1 - 4i) = 3 + i$

(2) $3i(4 + i) - 4(2i - 1) = 1 + 4i$

(3) $(4 - 2i)(3i - 1) = 2 + 14i$

(4) $(2 + 3i)^2 = -5 + 12i$

(5) $(i - 1)^3 = 2i + 2$

(6) $i^5 = i$

(7) $\dfrac{3 + 2i}{3 - i} = \dfrac{7 + 9i}{10}$

問題 1.8. 数学ビデオ「Dimensions」の第 5 章[1]を鑑賞し，以下の文章の $\boxed{}$ の中に入る言葉を答えなさい．

(1) このビデオの中では，(-1) 倍することを幾何学的に $\boxed{\text{π 回転}}$ と解釈している．

原点を中心とする

(180度)

(2) 複素数 z, w に対し，積 zw の絶対値 $|zw|$ はそれぞれの絶対値 $|z|, |w|$ の $\boxed{\text{積}}$ に等しい．

(3) 複素数 z, w に対し，積 zw の偏角 $\arg(zw)$ はそれぞれの偏角 $\arg(z), \arg(w)$ の $\boxed{\text{和}}$ に等しい．

問題 1.9. 次の複素数 $z = \sqrt{3} + i, w = -2 + 2\sqrt{3}\,i$ に対し以下の問の答えなさい，

(1) z, w を複素数平面の点として図示しなさい．

(2) z, w の絶対値と偏角を求めなさい．

(3) 積 zw を計算し，複素数平面の点として図示しなさい．

(4) 積 zw の絶対値と偏角を求めなさい．

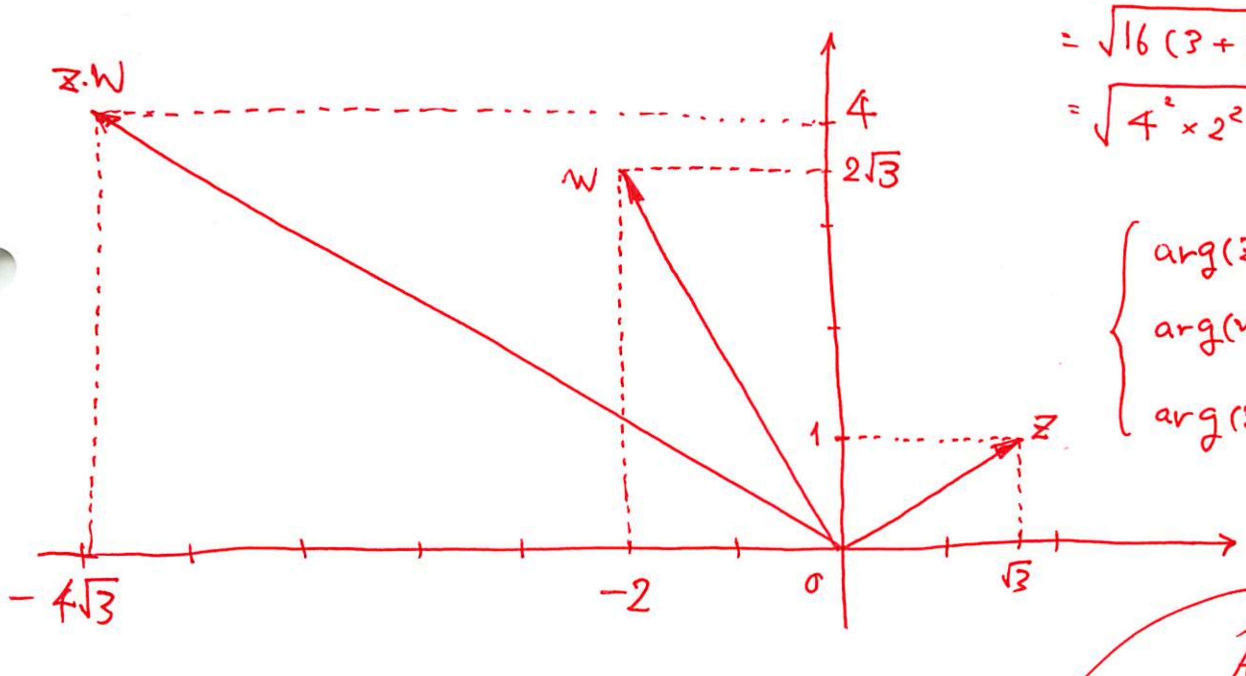
$|z| = \sqrt{1+3} = 2$

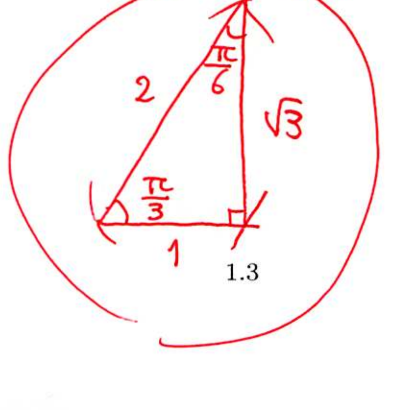
$|w| = \sqrt{4+12} = 4$

$z \cdot w = -4\sqrt{3} + 4i$

$|z \cdot w| = \sqrt{16 \times 3 + 16} = \sqrt{16(3+1)} = \sqrt{4^2 \times 2^2} = 8$

$$\begin{cases} \arg(z) = \dfrac{\pi}{6} \\ \arg(w) = \dfrac{2}{3}\pi \\ \arg(z \cdot w) = \dfrac{5}{6}\pi \end{cases}$$





[1] http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/lare.html を参照

問題 2.1.

(1) $A+B$ は計算できない．$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 9 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $A+B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

(3) $A+B$ は計算できない．$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}$

(4) $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 10 \\ 10 & 2 & 7 \\ -6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -9 \\ 9 & 4 & -3 \\ 5 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

問題 2.2.

(1) ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 7 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　(2) ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　(4) ${}^tA = A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

問題 2.3.

(1) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$　(2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$　(3) A^{-1} は存在しない．

問題 **2.4.**

(1) $AB = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 5 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ (2)(5) ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

(3) ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, ${}^tB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (4) ${}^tA{}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 9 & -1 & -1 \\ 11 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

問題 **2.5.** $a = -3,\ b = 2,\ c = 2$

問題 **2.6.** $a = 0,\ b = 0,\ c = -2$

問題 2.7.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & E_2 \\ O & A_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 & E_2 \\ O & B_2 \end{pmatrix}$$

(1) $AB = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & 2 \\ 13 & 10 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A_1B_1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$

(3) $A_1 + B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $A_2B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(5) 確かに $AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1 + B_2 \\ O & A_2B_2 \end{pmatrix}$ となっている．

問題 2.8. $A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ と分割することにより，自然数 n に対して

$$A^n = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2n & 3n \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

を得る（数学的帰納法で証明してみよ）．

問題 4.1.

(1) (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (ii) $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(iii) $\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (iv)（省略）

(2) (i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ (ii) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

(iii) $\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -12 \end{pmatrix}$ (iv)（省略）

問題 4.2. (i)(ii) は省略. (iii) のみ

(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 37 \\ 25 \\ -29 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

問題 4.4. 以下，k, l は任意の実数とする．

(1) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{11}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

問題 4.5. （省略）

問題 4.7.

(1) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 8 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

したがって，解は存在しない．

(2) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -8 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

したがって，解は存在しない．

問題 4.8.

(1) $k = -\dfrac{5}{2}$

(2) $k = 8$

問題 4.9.

(1) 自明解しか持たない.

(2) 非自明解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を持つ.

(3) 非自明解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を持つ.

(4) 自明解しか持たない.

問題 4.10.

(1) $k = -\dfrac{7}{2}$

(2) $k = \dfrac{2}{9}$

問題 6.1.

(1) $A' \cdot A = A \cdot A' = E_3$ となることを示せばよい（計算は省略）.

(2) (1) と同様.

(3) $AB = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 13 & 5 & 8 \\ 12 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B'A' = \begin{pmatrix} 19 & -28 & 32 \\ 5 & -7 & 8 \\ -34 & 50 & -57 \end{pmatrix}$

(4) (1) と同様.

(5) $BA = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad A'B' = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 8 \\ 10 & -39 & -26 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

(6) (1) と同様.

問題 6.2. （証明）　A が正則行列だとすると，

$$O = A^{-1} \cdot O = A^{-1} \cdot (AB) = (A^{-1}A) \cdot B = E_n \cdot B = B$$

となり，$B = O$ となる．B は零行列ではないと仮定しているので，これは矛盾する.

B が正則行列でないことも同様に示せる（考えてみよ）.

問題 6.3. $P[i, \lambda]^{-1} = P[i, \frac{1}{\lambda}], \quad Q[i, j]^{-1} = Q[i, j], \quad R[i, j, \lambda]^{-1} = R[i, j, -\lambda]$

問題 6.5. （省略）

問題 6.6.

(1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{11}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \frac{4}{13} & -\frac{5}{13} & -\frac{2}{13} \\ -\frac{1}{26} & \frac{11}{26} & \frac{7}{26} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{10}{3} & -1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ \frac{7}{3} & -\frac{8}{3} & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{8}{7} & \frac{12}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} & \frac{9}{7} \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{11}{9} & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$

問題 6.7.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3k} & -\frac{k+1}{6k} & -\frac{2k+1}{3k} \\ \frac{1}{k} & -\frac{1}{2k} & -\frac{1}{k} \\ \frac{1}{3k} & \frac{1}{3}-\frac{1}{6k} & \frac{k-1}{3k} \end{pmatrix}$$

問題 7.1.

$$\mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = +1, \quad \mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = +1, \quad \mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = +1,$$

$$\mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -1, \quad \mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1, \quad \mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -1.$$

問題 7.2. この公式を（3 次正方行列に関する）サラスの公式という；

$$\begin{aligned} &\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ =&a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}) \end{aligned}$$

問題 7.3.

(1) $\det(A) = 1$
(2) $\det(B) = 1$
(3) $\det(C) = 6$

問題 7.4.

(1) $\det(AB) = 1$
(2) $\det(C^{-1}) = \dfrac{1}{6}$

問題 7.5. $\det(P[i, \lambda]) = \lambda, \qquad \det(Q[i, j]) = -1, \qquad \det(R[i, j, \lambda]) = 1$

問題 7.7. （省略）

問題 7.8.

(1) 0

(2) −12

(3) 0

問題 7.10.

$$\det \begin{pmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{pmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

問題 7.11. 行列式の性質 d-5) を用いて証明する；

$E_n = A \cdot A^{-1}$ であるから，

$$\det(E_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \times \det(A^{-1})$$

となる．ここで，$\det(E_n) = 1$ であることから，

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

を得る．

問題 7.13.

(1) -12

(2) 0

(3) -88