クラメールの公式

n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ と n 項数ベクトル $\vec{b}=(b_i)$ に対し，A の第 j 列を $\vec{b}$ に置き換えた行列を A_j とおく；

$$A_j=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

行列 A が正則行列のとき，連立方程式 $A\vec{x}=\vec{b}$ の解は

$$\vec{x}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} \det(A_1) \\ \det(A_2) \\ \vdots \\ \det(A_n) \end{pmatrix}$$

となる．これをクラメールの公式という．

例題 7.16. 次の連立方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ -3x+2y+2z=-1 \\ 5x+y-3z=-2 \end{cases} \tag{7.1}$$

解. 連立方程式 (7.1) を行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる．係数行列を $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$，定数項ベクトルを $\vec{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ とおき，A の第 j 列を $\vec{b}$ に置き換えた行列を A_j とおく（$j=1,2,3$）．つまり，

$$A_1=\left(\boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}}\begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{matrix}\right),\quad A_2=\left(\begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{matrix}\boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{matrix}\right),\quad A_3=\left(\begin{matrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{matrix}\boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}}\right).$$

A および A_j の行列式を計算すると

$$\det(A_1) = -26, \quad \det(A_2) = 26, \quad \det(A_3) = -52, \quad \det(A) = -26.$$

したがって，クラメールの公式から，(7.1) の解は

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \mathbf{1}, \quad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \mathbf{-1}, \quad z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \mathbf{2}.$$

問題 7.17. 次の連立方程式[*1]の解をクラメールの公式を用いて求めなさい．

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 4 \\ 3x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

（付録：クラメールの公式の証明）．

- A_j の構成の仕方より，A_j の (l, j) 余因子 Δ'_{lj} は A の (l, j) 余因子 Δ_{lj} に等しいことがわかる（$l = 1, 2, \ldots, n$）．
- $\det(A_j)$ を第 j 列に関して余因子展開すると

$$\begin{aligned} \det(A_j) &= \Delta'_{1j} b_1 + \Delta'_{2j} b_2 + \cdots + \Delta'_{nj} b_n \\ &= \Delta_{1j} b_1 + \Delta_{2j} b_2 + \cdots + \Delta_{nj} b_n. \end{aligned}$$

  したがって，

$$\begin{aligned} \tilde{A}\vec{b} &= \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Delta_{11} b_1 + \Delta_{21} b_2 + \cdots + \Delta_{n1} b_n \\ \Delta_{12} b_1 + \Delta_{22} b_2 + \cdots + \Delta_{n2} b_n \\ \vdots \\ \Delta_{1n} b_1 + \Delta_{2n} b_2 + \cdots + \Delta_{nn} b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(A_1) \\ \det(A_2) \\ \vdots \\ \det(A_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- A が正則行列ならば，$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$ であるから，連立方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ の解は

$$\vec{x} = A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}\vec{b} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(A_1) \\ \det(A_2) \\ \vdots \\ \det(A_n) \end{pmatrix}.$$

□

[*1] プリント p.12，問題 3.5 (2)