余因子行列

n 次正方行列 A に対し，A の余因子 Δ_{ij} を成分とする行列

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

を A の余因子行列とよぶ（$\tilde{A}$ の成分と余因子の添字のつけ方の注意せよ）.

例題 **7.14.** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ に対し，以下の問に答えなさい.

(1) A の行列式を求めなさい.

(2) A の余因子行列 $\tilde{A}$ を求めなさい.

(3) $A\tilde{A}$ および $\tilde{A}A$ を計算しなさい.

解. (1) 第 1 列について余因子展開すると

$$\begin{aligned} \det(A) =& 2 \times \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + (-1) \times \det \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ =& 2 \times (-3) + (-1) \times (-12) = \mathbf{6}. \end{aligned}$$

(2) 各余因子 Δ_{ij} は

$$\Delta_{11} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{-3}, \quad \Delta_{12} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{-4},$$

$$\Delta_{13} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{-1}, \quad \Delta_{21} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{12},$$

$$\Delta_{22} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{8}, \quad \Delta_{23} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{2},$$

$$\Delta_{31} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \mathbf{9}, \quad \Delta_{32} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \mathbf{6},$$

$$\Delta_{33} = (-1)^6 \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{3}.$$

となるので，余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 9 \\ -4 & 8 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3) $A\tilde{A} = \tilde{A}A = 6E_3$ となる（計算して確かめよ）.

余因子行列の性質

- 余因子展開の式 (p.28 を参照) は，$A\tilde{A}$ および $\tilde{A}A$ の 対角成分がすべて $\det(A)$ に等しい ことを意味している.
- 一方，$A\tilde{A}$ および $\tilde{A}A$ の 対角成分以外の成分はすべて 0 となる.
  （証明）$A\tilde{A}$ の (i,j) 成分が 0 になることを示す（$i \neq j$）.
  - 行列 $A = (a_{kl})$ から，次のようにして行列 $A' = (a'_{kl})$ を構成する；
    A' の j 行目は A の i 行目に等しい（$a'_{jk} = a_{ik}, k = 1, \ldots, n$）.
    A' の $l(\neq j)$ 行目は A の l 行目に等しい.（$a'_{lk} = a_{lk},\ l \neq j,\ k = 1, \ldots, n$）.
  - A' は i 行目と j 行目が等しいので，行列式の性質から $\det(A') = 0$.
  - A' の余因子 Δ'_{jk} と A の余因子 Δ_{jk} は等しい（$k = 1, 2, \ldots, n$）.
  - A' を j 行目に関して余因子展開すると

$$\begin{aligned} 0 = \det(A') &= a'_{j1}\Delta'_{j1} + a'_{j2}\Delta'_{j2} + \cdots + a'_{jn}\Delta'_{jn} \\ &= a_{i1}\Delta_{j1} + a_{i2}\Delta_{j2} + \cdots + a_{in}\Delta_{jn}. \end{aligned}$$

    これは「$A\tilde{A}$ の (i,j) 成分が 0 になること」を意味する.
- 以上のことから，余因子行列は

$$A\,\tilde{A} = \tilde{A}\,A = \det(A)\,E_n$$

  を満たす．特に，$\det(A) \neq 0$ ならば，$\boldsymbol{A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\tilde{A}}$ となる.

問題 **7.15.** 問題 6.6（p.21，演習問題 6.2）の各行列を A とおく．次の問に答えなさい.

(1) A の行列式 $\det(A)$ を求めなさい.

(2) A の余因子行列 $\tilde{A}$ を求めなさい.

(3) 問題 6.6 で求めた A の逆行列と $\dfrac{1}{\det(A)}\tilde{A}$ が等しくなることを確かめなさい.