余因子

- n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対し，$(n-1)$ 次正方行列 A_{ij} を「A から i 行目と j 列目を取り除いた行列」と定義する．
- $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ を A の $\boldsymbol{(i,j)}$ **余因子**とよぶ．

行列式の余因子展開

A を n 次正方行列，Δ_{ij} を A の (i,j) 余因子とする．このとき，任意の i に対し，以下が成り立つ；

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Delta_{ij}=a_{i1}\Delta_{i1}+a_{i2}\Delta_{i2}+\cdots+a_{in}\Delta_{in},$$

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\Delta_{ji}=a_{1i}\Delta_{1i}+a_{2i}\Delta_{2i}+\cdots+a_{ni}\Delta_{ni}.$$

- この公式は行列式の性質 d-1)，d-2)，d-4) から導きだされる．
- 行列の性質 d-4) は，第 1 行（または第 1 列）に関する余因子展開の特別な場合である．
- 行列式を求めるとき，成分 0 を多く含む行（または列）に関して余因子展開すると行列式の計算が比較的簡単になる．

例題 **7.12.** 次の行列 A の行列式を求めよ．

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\12&13&14&5\\11&16&15&6\\10&9&8&7\end{pmatrix}$$

解. 行列式の性質 d-3) を用いて，なるべく 0 を多く含む行（または列）をつくるように行列を変形していき，その行（または列）に関して行列式を余因子展開する．

(第 1 列を (-1) 倍して第 2 列，第 3 列にそれぞれ加える)

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 12 & 1 & 2 & 5 \\ 11 & 5 & 4 & 6 \\ 10 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} = 2 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 12 & 1 & 1 & 5 \\ 11 & 5 & 2 & 6 \\ 10 & -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

(第 3 列を (-1) 倍して第 2 列に加える)

$$= 2 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 12 & 0 & 1 & 5 \\ 11 & 3 & 2 & 6 \\ 10 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

(第 3 列に関して展開)

$$= 2 \times 3 \times \left\{ (-1)^{3+2} \times \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 12 & 1 & 5 \\ 10 & -1 & 7 \end{pmatrix} \right\} = (-6) \times \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 12 & 1 & 5 \\ 10 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

(第 2 列を (-1) 倍して第 1 列に，(-4) 倍して第 3 列にそれぞれ加える)

$$= (-6) \times \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 11 & 1 & 1 \\ 11 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

(第 1 行に関して展開)

$$= (-6) \times 1 \times \left\{ (-1)^{1+2} \times \det\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 11 & 11 \end{pmatrix} \right\} = 6 \times \det\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= 6(121 - 11) = \mathbf{660}.$$

問題 **7.13.** 次の行列の行列式を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -5 & 4 & -7 & -8 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$