置換の行列表示

n 次の置換 σ に対し，n 次正方行列 A_σ を以下の 3 つの条件を満たす行列として定める；

- A_σ の各列は 1 となる成分をただ 1 つだけ持ち，残りの成分はすべて 0 である．
- A_σ の各行は 1 となる成分をただ 1 つだけ持ち，残りの成分はすべて 0 である．
- $A_\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(1) \\ \sigma(2) \\ \vdots \\ \sigma(n) \end{pmatrix}$

このように定まる行列 A_σ を σ に対応する置換行列とよぶ．

例. 4 次の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対応する置換行列 A_σ は

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．

置換行列の性質

(1) $A_\sigma A_\tau = A_{\sigma\circ\tau}$
(2) ${A_\sigma}^{-1} = A_{\sigma^{-1}}$
(3) $\det(A_\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma)$