

行列式の性質

d-1) 行に関する線型性:

$$\det \begin{pmatrix} \dots & & & \\ a_{i1} + cb_{i1} & \dots & a_{ij} + cb_{ij} & \dots & a_{in} + cb_{in} \\ \dots & & & \end{pmatrix} \\ = \det \begin{pmatrix} \dots & & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & & & \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} \dots & & & \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \dots & & & \end{pmatrix}$$

d-2) 任意の行の入れ換えに対して, (-1) 倍される:

$$\det \begin{pmatrix} \dots & & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & & & \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} \dots & & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & & & \end{pmatrix}$$

d-3) 任意の行をスカラー倍して, 別の行に加えても行列式は変わらない:

$$\det \begin{pmatrix} \dots & & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & & & \end{pmatrix} \\ = \det \begin{pmatrix} \dots & & & \\ a_{i1} + ca_{k1} & \dots & a_{ij} + ca_{kj} & \dots & a_{in} + ca_{kn} \\ \dots & & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & & & \end{pmatrix}$$

$$\text{d-4) } \det \left(\begin{array}{c|ccc} a & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ A \\ \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{c|ccc} a & 0 & \dots & 0 \\ \hline * & & & \\ \vdots & & & \\ * & & & \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ A \\ \end{array} \right) = a \cdot \det(A)$$

d-5) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

d-6) $\det({}^t A) = \det(A)$

(この性質から, d-1) ~ 3) は列に関する操作についても同様のことが成り立つ)

例題 7.6. 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 - \sqrt{2} & -4 + 5\sqrt{3} & -5 \\ 1 & -6 + 4\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 + \sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式を求めよ.

解. 方針: 行列式の性質 d-2, d-3) を使って行列を変形し, d-4) を使って行列のサイズを小さくしていく.

$$= \det \begin{pmatrix} 3 & 2 - \sqrt{2} & -4 + 5\sqrt{3} & -5 \\ 1 & -6 + 4\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 + \sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(4 行目を適当にスカラー倍して 1, 2, 3 行目に加えて, 1 行目と 4 行目を入れ換える)

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & 2 - 7\sqrt{2} & -7 + 5\sqrt{3} & -5 \\ 0 & -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 2 - 7\sqrt{2} & -7 + 5\sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ 2 - 7\sqrt{2} & -7 + 5\sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$$

(2 行目を (-5) 倍して 3 行目に加える)

$$= -\det \begin{pmatrix} -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ -8 + 3\sqrt{2} & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(1 行目と 2 行目を交換し, 1 列目と 3 列目を入れ換える)

$$= \det \begin{pmatrix} 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ -8 + 3\sqrt{2} & 3 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & -2 + \sqrt{3} & 2 - 2\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -6 + 2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & -8 + 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2 & -6 + 2\sqrt{2} \\ 3 & -8 + 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= 2(-8 + 3\sqrt{2}) - 3(-6 + 2\sqrt{2})$$

$$= 2.$$

問題 7.7. 問題 7.3 の行列 A, B, C の行列式を行基本変形を用いて (例題 7.6 を参考にし
て) 求めなさい.

問題 7.8. 次の行列の行列式を求めなさい.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

例題 7.9. 行列 $\begin{pmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{pmatrix}$ の行列式を求めなさい.

解.

$$\det \begin{pmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{pmatrix}$$

(2 列目を 1 列目に加える)

$$= \det \begin{pmatrix} a+b & -c & -b \\ a+b & a+b+c & -a \\ -b-a & -a & a+b+c \end{pmatrix} = (a+b) \det \begin{pmatrix} 1 & -c & -b \\ 1 & a+b+c & -a \\ -1 & -a & a+b+c \end{pmatrix}$$

(1 行目を 2 行目から引き, 1 行目を 3 行目に加える)

$$= (a+b) \det \left(\begin{array}{c|cc} 1 & -c & -b \\ 0 & a+b+2c & -a+b \\ 0 & -a-c & a+c \end{array} \right) = (a+b) \det \begin{pmatrix} a+b+2c & -a+b \\ -a-c & a+c \end{pmatrix}$$

$$= (a+b)(a+c) \det \begin{pmatrix} a+b+2c & -a+b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (a+b)(a+c) \{(a+b+2c) + (-a+b)\} = \mathbf{2(a+b)(b+c)(a+c)}.$$

問題 7.10. 行列 $\begin{pmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{pmatrix}$ の行列式を求めなさい.

問題 7.11. 正則行列 A に対し, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ が成り立つことを示しなさい.