正則行列の基本行列による積表示

n 次正則行列 A が行基本変形により単位行列 E_n に変形できたとしよう．行基本変形は基本行列を左からかけることに対応することから，このとき，

$$M_1M_2\cdots M_kA = E_n \tag{6.1}$$

となるような適当な基本行列 $M_1,\dots,M_k$ が存在する．ここで，(6.1) の両辺に左から $M_k^{-1}M_{k-1}^{-1}\cdots M_1^{-1}$ をかける．すると，左辺は

$$\begin{aligned}(M_k^{-1}\cdots M_2^{-1}M_1^{-1})(M_1M_2\cdots M_kA) =&(M_k^{-1}\cdots M_2^{-1})(M_1^{-1}M_1)(M_2\cdots M_kA)\\ =&(M_k^{-1}\cdots M_2^{-1})(M_2\cdots M_kA)\\ &\vdots\\ =&A\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$A = M_k^{-1}M_{k-1}^{-1}\cdots M_1^{-1}$$

を得る．基本行列の逆行列も基本行列なので，正則行列は基本行列の積として表せることがわかる（簡約階段行列への基本変形の仕方が一意的でないように，基本行列の積表示の仕方も 一意的ではない）．

例題 **6.8.** 次の行列の基本行列の積で表しなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

解. 例題 6.4（プリント p.20）の基本変形の手順から，

$$Q_{[2,3]}R_{[1,2,-1]}R_{[3,2,-2]}P_{[2,-\frac{1}{6}]}R_{[1,3,1]}R_{[2,3,-7]}R_{[2,1,-4]}A = E_3.$$

したがって，

$$\begin{aligned}A =&R_{[2,1,-4]}{}^{-1}R_{[2,3,-7]}{}^{-1}R_{[1,3,1]}{}^{-1}P_{[2,-\frac{1}{6}]}{}^{-1}R_{[3,2,-2]}{}^{-1}R_{[1,2,-1]}{}^{-1}Q_{[2,3]}{}^{-1}\\ =&R_{[2,1,4]}R_{[2,3,7]}R_{[1,3,-1]}P_{[2,-6]}R_{[3,2,2]}R_{[1,2,1]}Q_{[2,3]}\end{aligned}$$

問題 **6.9.** 例題 の方法を使って，問題 6.6 の各行列を基本行列の積で表しなさい．