逆行列の求め方

- n 次正則行列 A が行基本変形により単位行列 E_n に変形できたとしよう．このとき，行基本変形は基本行列を左から掛ける操作に対応することから
$$M_1M_2\cdots M_kA = E_n \tag{6.1}$$
となるような基本行列 $M_1,\ldots,M_k$ が存在する．
- 逆行列の定義より，(6.1) は $\boldsymbol{A^{-1} = M_1M_2\cdots M_k}$ であること意味する．
- $n\times 2n$ 行列 $(\,A\,|\,E_n\,)$ に (6.1) と同じ行基本変形を施すと
$$\left(\begin{array}{c|c} A & E_n \end{array}\right) \xrightarrow[M_1M_2\cdots M_k\times]{} \left(\begin{array}{c|c} M_1M_2\cdots M_kA & M_1M_2\cdots M_k \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_n & A^{-1} \end{array}\right)$$
となる．
- 以上のことから，$\boldsymbol{(\,A\,|\,E_n\,)}$ を行基本変形により $\boldsymbol{(\,E_n\,|\,P\,)}$ の形に変形したとき，$\boldsymbol{P}$ が $\boldsymbol{A}$ の逆行列であることがわかる．

例題 **6.4.** 次の行列の逆行列を求めなさい．
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

解．
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_{[2,1,-4]}\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[R_{[1,3,1]}R_{[2,3,-7]}\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[P_{[2,-\frac{1}{6}]}\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[R_{[1,2,-1]}R_{[3,2,-2]}\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[Q_{[2,3]}\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{array}\right).$$

したがって，
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}.$$

問題 6.5. 例題 6.4 の方法を使って，問題 6.1 の行列 A, B の逆行列を計算しなさい．

問題 6.6. 次の行列の逆行列を求めなさい．

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

問題 6.7. 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & k & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

が正則行列になるための k の条件を求めなさい．また，そのときの A の逆行列を求めなさい．