行列の階数

任意の $m \times n$ 行列 A は行と列の基本変形により

$$\underset{m \times n\text{ 行列}}{A} \xrightarrow[\text{列基本変形}]{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

と変形できる．このとき，r を行列 A の階数とよび，$\mathrm{rank}(A)$ と書く．階数は $\mathrm{rank}(A) \leq \max\{m, n\}$ を満たす．

事実

行列 A が行基本変形により

$$\underset{m \times n\text{ 行列}}{A} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left.\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & 0 & * & \cdots & 0 & * & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & 0 & * & \cdots \\ & & & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right. \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r\text{ 個} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

と（簡約）階段行列に変形したとき，$(0 \ \cdots \ 0)$ でない行の個数 r は A の階数に等しい．

行列の階数と連立方程式の解の自由度

A を $m \times n$ 行列，$r = \mathrm{rank}(A)$ とする．

一般の 1 次連立方程式の場合

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{5.1}$$

- $\mathrm{rank}(A \mid \vec{b}) = \mathrm{rank}(A) < n$ のとき，連立方程式 (5.1) は未知数の数が n 個で式の数が r 個の連立方程式に簡約化される．すべての式に共通に含まれる未知数の数は $(n-r)$ 個であるから，(5.1) の解は無限個存在し，解の自由度は $(n-r)$ である．
- $\mathrm{rank}(A \mid \vec{b}) = \mathrm{rank}(A) = n$ のとき，(5.1) の解の自由度は 0，つまり，解はただ 1 つに決まる．
- $\mathrm{rank}(A \mid \vec{b}) \neq \mathrm{rank}(A)$ のとき，(5.1) は解を持たない．

斉次連立方程式の場合

$$A\vec{x} = \vec{0} \tag{5.2}$$

- $\mathrm{rank}(A) = n$ のとき，(5.2) は非自明解を持たない．
- $\mathrm{rank}(A) < n$ のとき，(5.2) の非自明解が存在し，解の自由度は $(n-r)$ である．

問題 5.1. 問題 4.2, 4.4, 4.6, 4.9 の各連立方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ に対して，(i) $\mathrm{rank}(A)$ および $\mathrm{rank}(A \mid \vec{b})$ を求め，(ii) 階数と解の存在性，自由度との関係（上で述べた事）が成り立つことを確認しなさい．