□ 解の存在性

例題 4.6. 次の連立 1 次方程式の解が存在するか判定しなさい．

$$\begin{cases} x+3y-4z=3 \\ 2x-y+6z=-1 \\ 3x+2y+2z=3 \end{cases} \tag{4.1}$$

解. 連立方程式 (4.1) は，$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくことにより $A\vec{x}=\vec{b}$ と行列・ベクトル表示することができる．拡大係数行列 $\begin{pmatrix} A & \vec{b} \end{pmatrix}$ を行基本変形により簡約階段行列に変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

となる．これは (4.1) が連立方程式

$$\begin{cases} x+2z=0 \\ y-2z=0 \\ \quad 0=1 \end{cases} \tag{4.2}$$

と簡約化できることを意味する．しかし，(4.2) の式のうち 3 つ目の式は明らかに成り立たない．つまり，連立方程式 (4.1) の 解は存在しない．

問題 4.7. 次の連立方程式の解が存在するかどうか判定しなさい．

(1) $\begin{cases} 2x+4z=3 \\ -x+y-3z=2 \\ 3x-2y+8z=3 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x+y-3z=3 \\ x+y-z=1 \\ 3x-2y-8z=1 \end{cases}$

問題 4.8. 次の連立方程式が解を持つための実数 k の条件を求めなさい．

(1) $\begin{cases} 3x-2y+8z=k \\ 2x+4z=3 \\ -x+y-3z=2 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x+y-3z=3 \\ 3x-2y-8z=k \\ x+y-z=1 \end{cases}$