□ 解が一意に決まらない連立方程式

例題 4.3. 次の連立 1 次方程式の解を求めなさい．

$$\begin{cases} x+2y-4z=2 \\ 2x+3y+7z=1 \\ 3x+5y+3z=3 \end{cases} \tag{4.1}$$

解． 連立方程式 (4.7) は，$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくことにより

$$A\vec{x}=\vec{b} \tag{4.2}$$

と行列・ベクトル表示することができる．拡大係数行列 $\begin{pmatrix} A & \vec{b} \end{pmatrix}$ を行基本変形により簡約階段行列に変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 26 & -4 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 26 & -4 \\ 0 & 1 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる．これは (4.7) が連立方程式

$$\begin{cases} x+26z=-4 \\ y-15z=3 \\ (\,0=0\,) \end{cases} \tag{4.3}$$

と簡約化できることを意味する（つまり，(4.7) の解は (4.3) の解であり，この逆もまた正しい）．(4.3) の式のうち自明でない 2 式に <u>共通に含まれる未知数 z を $z=k$ とおく</u> と

$$x=-4-26k, \qquad y=3+15k$$

となる．したがって，方程式 (4.7) の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -26 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{（ただし，}k\text{ は任意の実数）} \tag{4.4}$$

と表すことができる（解が一意に決まらず，無限個存在する）．

問題 **4.4.** 次の連立方程式の解を求めなさい.

(1) $\begin{cases} x+3y-2z=2 \\ 2x+7y-4z=3 \\ 3x+7y-6z=8 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x-4y+10z=1 \\ 3x-2y-z=-1 \\ 5x-4y+2z=-1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x-y+3z-2w=8 \\ x+2z+w=3 \\ -2x-y+z+6w=2 \\ 2x-y+3z-2w=8 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x+z-w=1 \\ -x+y-z+2w=0 \\ -3x+2y-3z+5w=-1 \end{cases}$

事実

連立方程式

$$A\vec{x}=\vec{b} \tag{4.5}$$

の解が

$$\vec{x}=\vec{v}+k_1\vec{u}_1+k_2\vec{u}_2+\ldots+k_r\vec{u}_r$$

と表されるとする (ただし, $k_1,\ldots,k_r$ は任意の実数). このとき, ベクトル $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_r$ は (4.5) の定数項ベクトルを $\vec{0}$ に置き換えた連立方程式

$$A\vec{x}=\vec{0} \tag{4.6}$$

の解である.

例. （例題 4.3 について） $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -26 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$ は連立方程式

$$\begin{cases} x+2y-4z=\mathbf{0} \\ 2x+3y+7z=\mathbf{0} \\ 3x+5y+3z=\mathbf{0} \end{cases} \tag{4.7}$$

の解である（確かめよ).

問題 **4.5.** 上の事実を踏まえて，問題 4.4 の解を検算しなさい.