□ 逆行列を用いた連立方程式の解法

連立方程式の行列・ベクトル表示

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{4.1}$$

に対し，係数行列 A が正方行列[*1]であるとする．もし，A の逆行列が存在するとき，(4.1) の両辺に左から A^{-1} をかけると

$$\vec{x} = A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}.$$

つまり，(4.1) の解は $\boldsymbol{\vec{x} = A^{-1}\vec{b}}$ である．

問題 4.1. 次の各連立方程式を (i) $A\vec{x} = \vec{b}$ の形に書きなさい（係数行列 A と定数項ベクトル $\vec{b}$ を書きなさい）．(ii) 逆行列 A^{-1} を求めなさい．(iii) $A^{-1}\vec{b}$ を計算しなさい．(iv) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\vec{b}$ が連立方程式の解となることを示しなさい．

(1) $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x + 2y = -3 \end{cases}$

□ 掃き出し法

問題 4.2. 次の各連立方程式 (i) $A\vec{x} = \vec{b}$ の形に書きなさい（係数行列 A と定数項ベクトル $\vec{b}$ を書きなさい）．(ii) 係数拡大行列 $\begin{pmatrix} A & \vec{b} \end{pmatrix}$ を行基本変形を使って簡約階段行列に変形しなさい．(iii) 連立方程式の解を求めさない（必ず検算しなさい）．

(1) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ -3x + 2y + 2z = -1 \\ 5x + y - 3z = -2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 4 \\ 3x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + y - 3z - 4w = -6 \\ 2x + y + 5z + w = -6 \\ 2x + 2y + 2z - 3w = -10 \\ 3x + 6y - 2z + w = 4 \end{cases}$

[*1] 未知数の数と方程式の数が等しいとき．