基本変形

以下の 3 つの操作を行列の行基本変形という（列に関する同様の操作は列基本変形）；

- j 行目と k 行目を入れ替える
- j 行目の各成分を c 倍する（c は実数）.
- j 行目を c 倍して，k 行目に加える.

簡約階段行列

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

行列 A が簡約階段行列とは，ある自然数 k と $j_1, j_2, \ldots, j_k$ が存在し次の条件を満たすときをいう；

(1) $1 \leq i \leq k$ に対し，A の (i, j_i) 成分は 1.
(2) $1 \leq i \leq k$，$1 \leq j \leq j_i - 1$ に対し，A の (i, j) 成分は 0.
(3) $i \geq k+1$ ならば，A の (i, j) 成分は 0.
(4) $1 \leq i \leq k$ に対し，$1 \leq l \leq i-1$ ならば，A の (l, j_i) 成分は 0.

問題 3.1. 次の行列が簡約階段行列かどうか判定し，そうでないものは行基本変形により簡約階段行列に変形しなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

例題 **3.2.** 行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を行基本変形により，簡約階段行列の形に変形しなさい.

解.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

問題 **3.3.** 次の行列を行基本変形により簡約階段行列の形に変形しなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$