問題 1.1. 次のベクトルを各図中に図示しなさい．ただし，始点は原点でなくてもよい．

(1) 図 1 のベクトル $\vec{a}$ に対し，ベクトル $2\vec{a}$ および $-\dfrac{1}{2}\vec{a}$.

(2) 図 2 のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し，ベクトル $\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b}$.

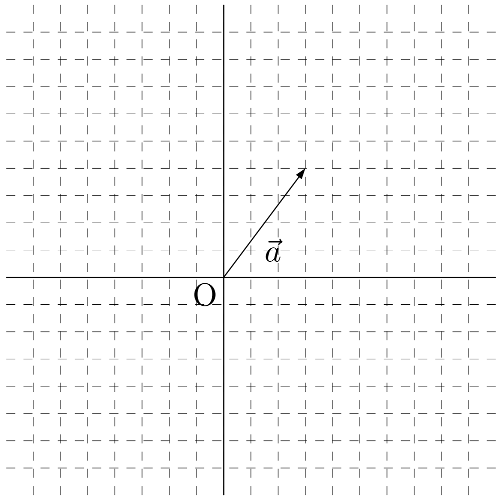

図 1

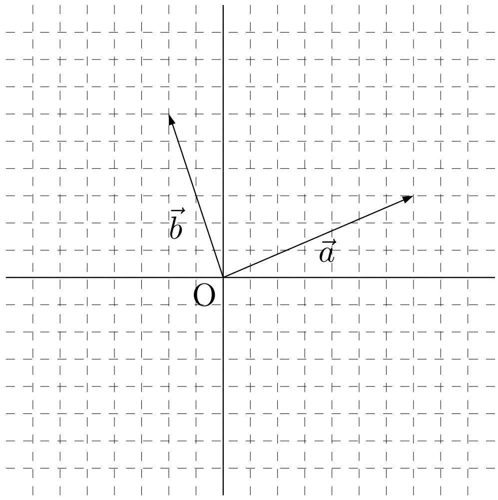

図 2

問題 1.2. 平面ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ に対し，次のベクトル $\vec{u}$ を成分表示しなさい．また，$\vec{u}$ の長さ $|\vec{u}|$ を求めなさい．

(1) $\vec{u} = -\vec{a} + \vec{b}$

(2) $\vec{u} = \vec{b} + 3\vec{a}$

(3) $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$

問題 1.3. 次のベクトル $\vec{a}$ に対し，$c\vec{a}$ の長さが 1 になるような実数 c を求めなさい．

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$

(3) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}$

問題 1.4. 次のベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ の (i) 長さ $|\vec{u}|, |\vec{v}|$, (ii) 内積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ および (iii) $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角 θ の余弦 $(\cos\theta)$ の値を求めなさい．

(1) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し，$\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{v} = -\vec{a} + 7\vec{b}$

(3) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(4) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$

(5) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に対し，$\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = -2\vec{a} - \vec{b}$

問題 1.5. 空間ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ c \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ c \end{pmatrix}$ が直交するように c を定めなさい．

問題 1.6. ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を 2 辺とする三角形の面積が $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ に等しいことを示しなさい．[*1]

[*1] ヒント：$\triangle$OAB の面積が $\frac{1}{2}|\mathrm{OA}||\mathrm{OB}|\sin\theta$ と書ける（ただし $\theta = \angle\mathrm{AOB}$）．これと内積の性質 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$ と三角関数の性質 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を使って示しなさい．